探寻必要条件 巧解恒成立问题

——从一道2019年高考函数导数题谈起

福建省莆田第二中学　　蔡海涛

本文系福建省基础教育课程教学研究课题《高中数学主干知识教学落实核心素养的研究——以函数、立几、数列为例》(课题编号：MJYKT2018-056) 研究成果之一.

2019年《普通高等学校招生全国统一考试大纲的说明（理科）》明确指出，高考对函数和导数的考查侧重于理解和应用，试题有一定的综合性，并与数学思想方法紧密结合.[1]纵观近几年的高考题，导数中的恒成立问题多次出现.充分考查了学生的综合素质及思维能力，考查了数学抽象、数学运算、逻辑推理素养，突出理性思维，彰显选拔功能.在解决这类问题的过程中，常需要构造函数求导、判断单调性、求最值，而考生在面临如何构造函数、繁杂导数运算、确定导数符号等环节时，往往束手无策，因畏难情绪或时间不足而就此放弃.通过研究2019年高考全国Ⅰ卷文科第20题，笔者发现用必要条件探路，取一些特殊值先猜后证，可找到解决问题的捷径.下面笔者就从这道高考题谈起，谈谈寻必要条件探路在求解导数恒成立问题中的作用，追寻破解之道.

引例　(**2019年高考全国Ⅰ卷·文20**)已知函数 $f(x)=2\sin x-x\cos x-x$ ，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数.

（1）证明：$f'(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 存在唯一零点；

（2）若 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)\geq ax$ ，求 a 的取值范围.

(1)略.

(2)**思路1** 根据已知条件，常规思路为构造函数 $F(x)=f(x)-ax$ ，然后对 $F(x)$ 求导，得 $F(x)$ 的单调性，再求出 $F(x)$ 的最小值，令最小值大于等于0，求出 a 的取值范围.

因为 $F'(x)=\cos x+x\sin x-1-a$ ，由(1)知 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上先增后减，存在 $m\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ ，使得 $f'(m)=0$ ，且 $f'(0)=0$ ，$f'(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-1>0$ ，$f'(\pi)=-2$.所以 $F'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上先增后减，$F'(0)=-a$ ，$F'(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-1-a$ ，$F'(\pi)=-2-a$ ，

因为 $F'(x)$ 的符号不确定，所以对当 $F'(\frac{\pi}{2})\leq 0$ 及 $F'(\frac{\pi}{2})>0$ 时的两种情况进行讨论，判断 $F(x)$ 的单调性，详细解答这里不再赘述.这种思路直接，但对于 $F'(x)$ 的符号讨论比较复杂，学生往往较难完整作答.

思路2　当 $x=0$ 时，显然 $f(x)=ax=0$.故只须证明当 $x\in(0,\pi]$ 时，$f(x)\geq ax$ 即可，即证 $a\leq\frac{f(x)}{x}$ ，因此只须求得函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ 的最小值，但由于 $g(x)$ 求导比较复杂，学生也较难完成作答.

思路3　由（1）可作出 $y=f(x)$ 的大致图象，令 $g(x)=ax$ ，这是一条过原点的直

线，考虑当$x\in[0,\pi]$时，$y=f(x)$的图象在$y=g(x)$上方的情况，求出a的取值范围.解题过程如下：

由（1）知，$f'(x)$在$(0,\pi)$上有唯一零点x_0，使得$f'(x_0)=0$，

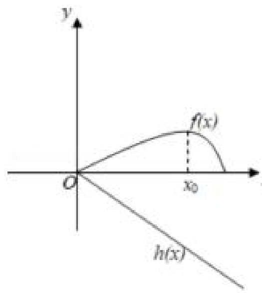

图1

且当$x\in(0,x_0)$时，$f'(x_0)>0$，$f(x)$单调递增；

当$x\in(x_0,\ \pi)$时，$f'(x_0)<0$，$f(x)$单调递减.

又$f(0)=0,f(\pi)=0$，

所以当$x\in[0,\pi]$时，$f(x)\geq 0$。令$h(x)=ax$，因为$f(x)\geq h(x)$，所以当$a\leq 0$时显然满足条件，作出图象如图1所示.

又当$a>0$时，$f(\pi)=0,g(\pi)=a\pi>0$，不合题意，舍去.

综上，a的取值范围为$(-\infty,0]$.

思路4　当$x\in[0,\pi]$时，$f(x)\geq ax$恒成立，故可对x取特殊值进行探路，缩小a的取值范围，解题过程如下：

令$x=\pi$，得$f(\pi)\geq a\pi$，可化得$a\leq 0$.下证当$a\leq 0$时符合题意.

由（1）知$f'(x)$在$(0,\pi)$上先增后减，存在$m\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，使得$f'(m)=0$，且$f'(0)=0$，$f'(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-1>0$，$f'(\pi)=-2$.所以当$0<x<m$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，$f(x)>f(0)=0\geq ax$；当$m<x\leq\pi$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，$f(x)>f(\pi)=0\geq ax$；当$x=0$时，$f(0)=0\geq ax$.综上，$a$的取值范围为$(-\infty,0]$.

当前高考从能力立意转变为素养导向，素养导向的高考命题注重科学思维的考查，要求学生以严谨的科学思维、严肃的科学态度去思考每一个实际问题.[2]这道高考题充分地考查学生思维空间及对问题合理的变形转化意识，很好地实现了对学生素养的考查.由以上思路分析比较，可以发现思路3和思路4比较简捷，主要是源于利用必要性探路取点，通过特殊值缩小范围，使得运算简化，然后先猜后证，最后再论证其严谨性.下面例谈这种方法在求解导数恒成立问题中的应用.

1　必要性入手　充分性验证

例1　(2006年高考全国Ⅱ卷·理20)设函数$f(x)=(x+1)\ln(x+1)$.若对所有的$x\geq 0$，都有$f(x)\geq ax$成立，求实数a的取值范围.

解析　引理　若函数$f(x)$在$x=a$处可导，且$x\in[a,b)$时，$f(x)\geq f(a)$恒成立，则$f'(a)\geq 0$.

证明：若$f(x)\geq f(a)$，则$f'(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\geq 0$

令$g(x)=f(x)-ax=(x+1)\ln(x+1)-ax(x\geq 0)$，$g'(x)=1+\ln(x+1)-a$.

由$g(0)=0$，且$x\geq 0$时，总有$g(x)\geq 0$，由引理可得$g'(0)\geq 0$，即$1+\ln 1-a\geq 0$，解得$a\leq 1$.

又当$a\le 1$时，$g'(x)=1+\ln(x+1)-a\ge 0(x\ge 0)$. 故函数$g(x)$在$\left[0,+\infty\right)$上单调递增，则$g(x)\ge g(0)=0$. 即当$x\ge 0$时，$f(x)\ge ax$恒成立。所以$a$的取值范围为$\left(-\infty,1\right]$.

评析 本题的自然想法是构造函数$g(x)=f(x)-ax=(x+1)\ln(x+1)-ax(x\ge 0)$，不难发现$g(0)=0$，所以考虑从恒成立时的必要条件入手，得到$a\le 1$，再证明充分性，即在$a\le 1$时，$f(x)\ge ax$成立. 一般地，不等式恒成立问题，常常是用端点值代入不等式取等号，利用区间端点的导数值的符号来确定参数的范围，由此来做为必要条件.“横看成岭侧成峰，远近高低各不同.”许多问题，如果换一个角度看，就能看到别样的“风景”.[3]

2 特殊值探路 美中求真

例 2 已知函数$g(x)=x^2-x\ln x+ax-a$. 当$x\in(1,+\infty)$时，$g(x)\ge 0$恒成立，求整数a的最小值.

解析 因为$g(x)=x^2-x\ln x+ax-a\ge 0$对$x\in(1,+\infty)$恒成立，

取$x=e$，则$e^2-e+ae-a\ge 0$，解得$a\ge -e$，又$a\in Z$，取$a=-2$，

此时，$g(x)=x^2-x\ln x-2x+2$，令$h(x)=x-\ln x+\dfrac{2}{x}-2(x>1)$，

因为$h'(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2}=\dfrac{(x-2)(x+1)}{x^2}(x>1)$，

当$1<x<2$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减；当$x>2$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增.

所以$h(x)_{\min}=h(2)=1-\ln 2>0$，$h(x)>0$对一切$x>1$恒成立.

所以，当$a=-2$时，$g(x)=x^2-x\ln x-2x+2>0$恒成立. 故$a_{\min}=-2$.

评析 本题的常规思路为对参数a进行分离，得到$a\ge\dfrac{x\ln x-x^2}{x-1}$对一切$x>1$恒成立，进而转化去求函数$h(x)=\dfrac{x\ln x-x^2}{x-1}$最值，但由于对函数$h(x)$求导较难，学生不易讨论，难以完整作答. 所以考虑恒成立时的必要条件，对x取特殊值探路，缩小参数a的取值范围，再进行验证，这样运算简化了很多。一般地，解决恒成立问题，寻找必要条件，取特殊值是种常用的手段，对特殊值的选取可根据函数的特征，常取一些整数值，指数式和对数式取的值考虑使得超越式转化为非超越式，三角式取特殊角等. 总的说来，取特殊值是基于数学简洁美的追求，考虑数学运算的简洁性.[4]

3 先猜后证 步步为营

例 3 已知函数 $f(x)=(x-2)e^x-\frac{a}{2}x^2$，其中 $a\in \mathrm{R}$，e 为自然对数的底数. 若函数 $y=f(x)+2x$ 在 R 上单调递增，求实数 a 能取到的最大整数值.

解析 记 $g\left(x\right)=\left(x-2\right)e^x-\frac{a}{2}x^2+2x$，

由题意知 $g'\left(x\right)=\left(x-1\right)e^x-ax+2\geq 0$ 在 R 上恒成立. 由 $g'\left(1\right)=-a+2\geq 0$，可得 $g'\left(x\right)\geq 0$ 的必要条件是 $a\leq 2$. 若 $a=2$，则 $g'\left(x\right)=\left(x-1\right)e^x-2x+2=\left(x-1\right)\left(e^x-2\right)$，当 $\ln 2<x<1$ 时，$g'\left(x\right)<0$，故 $a<2$.

下面证明：当 $a=1$ 时，不等式 $\left(x-1\right)e^x-x+2\geq 0$ 恒成立.

令 $h\left(x\right)=\left(x-1\right)e^x-x+2$，则 $h'\left(x\right)=xe^x-1$。记 $H\left(x\right)=xe^x-1$，则 $H'\left(x\right)=\left(x+1\right)e^x$，

当 $x>-1$ 时，$H'\left(x\right)>0, H\left(x\right)$ 单调递增且 $H\left(x\right)>-\frac{1}{e}-1$；

当 $x<-1$ 时，$H'\left(x\right)<0, H\left(x\right)$ 单调递减且 $-\frac{1}{e}-1<H\left(x\right)<0$，

因为 $H\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{e}}{2}-1<0, H\left(1\right)=e-1>0$。所以存在唯一的 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得 $H\left(x_0\right)=0$，

且当 $x\in\left(-\infty,x_0\right)$ 时，$H\left(x\right)<0$，$h\left(x\right)$ 单调递减；

当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$ 时，$H\left(x\right)>0, h\left(x\right)$ 单调递增. 所以 $h\left(x\right)_{\min}=h\left(x_0\right)=\left(x_0-1\right)e^{x_0}-x_0+2$，

因为 $H\left(x_0\right)=0$，所以 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，则 $h\left(x_0\right)=\left(x_0-1\right)\frac{1}{x_0}-x_0+2=3-\left(\frac{1}{x_0}+x_0\right)$，

因为 $\frac{1}{2}<x_0<1$，所以 $2<\frac{1}{x_0}+x_0<\frac{5}{2}$，$h\left(x\right)_{\min}=h\left(x_0\right)>0$，

从而 $\left(x-1\right)e^x-x+2\geq 0$ 恒成立，故 a 能取得的最大整数为 1.

评析 本题由导数与函数单调性的关系将问题转化为不等式恒成立问题，研究不等式恒成立的条件，即 $g'\left(x\right)=\left(x-1\right)e^x-ax+2\geq 0$，用特值探路，得到 $a\leq 2$. 但 $a=2$ 经验证不合，故猜测 $a=1$ 时，不等式 $\left(x-1\right)e^x-x+2\geq 0$ 恒成立，下对这个结论进行验证。在上述的求解过程中，对 $a=2$ 的验证是关键环节. 从已知的必要条件入手，取特殊值等手段都是探路，而不是解答的全部，必须对充分性进行严谨的验证. 对充分性的验证体现了学生对推理证明步骤完整性这个数学本质的把握，而注重数学本质的考查，是素养立意命制试题的

重要视角.[5]

4　结构分析　合理赋值

例 4（2012 年高考湖南卷·理 22(1)）已知函数 $f(x)=e^{ax}-x$，其中 $a\neq 0$．若对一切 $x\in\mathrm{R}$，$f(x)\geq 1$ 恒成立，求 a 的取值集合.

解析　因为对一切 $x\in\mathrm{R}$，$f(x)\geq 1$ 恒成立，又 $1=f(0)$，所以 $x=0$ 是函数 $f(x)(x\in\mathrm{R})$ 的最小值点，也是 $f(x)(x\in\mathrm{R})$ 的极小值点，所以 $f'(0)=ae^{0}-1=0$，解得 $a=1$.

检验:当 $a=1$ 时，$f(x)=e^{x}-x, f'(x)=e^{x}-1$ 。当 $x\leq 0$ 时，$f'(x)\leq 0$，函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,0\right]$ 上单调递减；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增.

则 $f(x)_{\min}=f(0)=1$，所以 $f(x)\geq 1(x\in\mathrm{R})$ 恒成立.

综上，a 的取值集合为 $\{1\}$ 。

评析　本题巧解关键是在于对 $f(x)\geq 1$ 式子进行结构分析，发现 $1=f(0)$，进而发现 $x=0$ 是函数 $f(x)(x\in\mathrm{R})$ 的极小值点. 结构分析是通过对需要解决问题的外在表现形式进行合理的分析,而后赋值,得出一个初步的分析结果,而后再进行严谨的论证.

5 结语

寻必要条件探路法带有一定的技巧性，需要我们在解题活动中的灵感. 从思维方式看，灵感思维是从整体上对客观事物作出迅速而直接的判断，从认识的过程来看,灵感是一种突变性的创造活动. 波利亚强调通过有意识的努力,就会在解题活动产生一个个“好念头”，这就是解题的灵感.[6]通过以上例题的展示，希望能给读者的解题活动灵感带来一点启发.

参考文献:

[1]教育部考试中心. 2019 年普通高等学校招生全国统一考试大纲的说明（理科）[M]. 北京:高等教育出版社，2018.

[2]任子朝. 从能力立意到素养导向[J]. 中学数学教学参考，2018(5):1.

[3]单墫. 解题漫谈[M]. 上海:上海教育出版社，2016.

[4]徐小平，林晴岚. 至简至美　局部放缩　追本溯源——导数综合问题中特殊值的选取策略[J]. 数学通讯，2018(5):44-48.

[5]柯跃海. 选拔性数学考试的命题与评价[M]. 西安:陕西师范大学出版总社，2018.

[6]赵雄辉,刘云章.怎样教解题——波利亚数学教育著作选讲[M].长沙:湖南教育出版社，2015.