

# 复数易错题型盘点

蔡海涛

作者简介：蔡海涛，（1975- ），男，福建莆田，中学高级教师.福建省普通高中课程教学指导委员会委员，福建省名师工作室成员，福建省“十三五”中学数学学科带头人培养对象.

本文系福建省教育科学“十三五”规划课题“深度融合信息技术落实高中数学核心素养的实践研究”（课题编号：FJJKXB18-379）研究成果之一.

摘要：高考中对复数考查比较基础，但也有一些易错点.盘点易错类型有：复数基本概念不清、基本运算不扎实、几何意义不明确等.

关键词：复数 易错题型

高考数学中对复数的考查比较基础，一般在选择题或填空题的前几题出现.很多学生见到试题往往认为一看就会，甚至连题目都没看完就迫不及待地贸然下手，结果因为考虑不严谨而在某个环节出现差错<sup>[1]</sup>.现将复数高考重点考查题型及易错点总结如下，以引起同学们的注意.

## 一、考查复数的基本概念

例 1 (2012 年高考北京卷·理 3) 设  $a, b \in \mathbf{R}$ . “ $a = 0$ ” 是 “复数  $a + bi$  是纯虚数” 的

A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

错解 C.

剖析 对纯虚数的概念不清，复数  $a + bi$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ) 是纯虚数，须满足  $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ . 故选 B.

例 2 (2015 年高考上海卷·理 15) 设  $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ ，则 “ $z_1, z_2$  中至少有一个数是虚数”

是 “ $z_1 - z_2$  是虚数” 的

A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件 C. 充要条件 D. 既非充分又非必要条件

错解 认为虚数与虚数的差一定为虚数，选 C.

剖析 当两个虚数的虚部相等时，它们的差为实数，故不是充分条件，而必要性显然，故选 B.

例 3 (2014 年高考广东卷·文 10) 对任意复数  $w_1, w_2$ ，定义  $w_1 * w_2 = w_1 \overline{w_2}$ ，其中  $\overline{w_2}$

是  $w_2$  的共轭复数. 对任意复数  $z_1, z_2, z_3$ ，有如下四个命题：

$$\textcircled{1} (z_1 + z_2) * z_3 = (z_1 * z_3) + (z_2 * z_3); \quad \textcircled{2} z_1 * (z_2 + z_3) = (z_1 * z_2) + (z_1 * z_3);$$

$$\textcircled{3} (z_1 * z_2) * z_3 = z_1 * (z_2 * z_3); \quad \textcircled{4} z_1 * z_2 = z_2 * z_1. \text{ 则真命题的个数是}$$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

错解 对共轭复数的概念及运算性质不清, 误选答案.

剖析: 对命题①,  $(z_1 + z_2) * z_3 = (z_1 + z_2) \cdot \overline{z_3} = z_1 \cdot \overline{z_3} + z_2 \cdot \overline{z_3} = (z_1 * z_3) + (z_2 * z_3)$ , 正确;

对命题②,  $z_1 * (z_2 + z_3) = z_1 \cdot \overline{(z_2 + z_3)} = z_1 \cdot \overline{z_2} + z_1 \cdot \overline{z_3} = (z_1 * z_2) + (z_1 * z_3)$ , 正确;

对命题③, 左边  $= (z_1 * z_2) * z_3 = (z_1 \cdot \overline{z_2}) \cdot \overline{z_3} = z_1 \cdot \overline{z_2} \cdot \overline{z_3}$ , 右边  $= z_1 * (z_2 * z_3) = z_1 * (z_2 \cdot \overline{z_3})$   
 $= z_1 \cdot \overline{z_2 \cdot z_3} = z_1 \cdot \overline{z_2} \cdot \overline{z_3}$ , 左边  $\neq$  右边, 命题③错误; 对命题④, 取  $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 + i$ , 则

左边  $= 3 + i$ , 右边  $= 3 - i$ , 命题④错误. 故选 B.

## 二、考查复数的基本运算

例 4 (2015 年高考江苏卷 · 3) 设复数  $z$  满足  $z^2 = 3 + 4i$  ( $i$  是虚数单位), 则  $z$  的模为

\_\_\_\_\_.

错解 未能合理应用复数模的性质, 先求得复数  $z$  导致运算错误.

剖析 在处理复数相等的问题时, 一般将两个复数均化成一般形式, 利用复数相等的充要条件“实部相等, 虚部相等”进行求解. 本题涉及复数的模, 利用复数模的性质求解比较

简便,  $|z^2| = |3 + 4i| = 5 \Rightarrow |z|^2 = 5 \Rightarrow |z| = \sqrt{5}$ . 模的性质还有  $|z|^2 = z \overline{z}, |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

等.

例 5 (2015 年高考湖北卷 · 理 1)  $i$  为虚数单位,  $i^{607}$  的共轭复数为

A.  $i$                       B.  $-i$                       C.  $1$                       D.  $-1$

错解 混淆了  $i$  乘方周期性的性质, 导致运算错误.

剖析 因为  $i^{607} = i^{4 \times 151 + 3} = -i$ , 所以  $i^{607}$  的共轭复数为  $i$ , 选 A.

复数中,  $i$  是虚数单位,  $i^2 = -1; i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i, i^{4n} = 1 (n \in \mathbf{Z})$ .

例 6 (2014 年高考上海卷 · 理 11) 已知互异的复数  $a, b$  满足  $ab \neq 0$ , 集合  $\{a, b\} = \{a^2, b^2\}$ , 则  $a + b =$  \_\_\_\_\_.

错解 未理解复数相等的意义, 不能正确求解复数方程致误.

剖析 (1) 若  $a = a^2, b = b^2$ , 因为  $ab \neq 0$  且  $a \neq b$ , 无解;

(2) 若  $a = b^2, b = a^2$ , 又  $ab \neq 0$  且  $a \neq b$ , 可得  $\begin{cases} a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ b = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$  或  $\begin{cases} a = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ b = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$ ,

则  $a+b=1$ .

### 三、考查复数的几何意义

例 7 (2016 年高考北京卷·理 9) 设  $a \in R$ , 若复数  $(1+i)(a+i)$  在复平面内对应的点位于实轴上, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

错解 未能理解复数的几何意义, 不能对已知复数对应的点位于实轴上这个条件进行合理转化, 从而产生错误.

剖析  $(1+i)(a+i) \in R \Rightarrow a = -1$ , 故填:  $-1$ .

例 8 (2014 年高考全国卷 II·理 2) 设复数  $z_1, z_2$  在复平面内的对应点关于虚轴对称,  $z_1 = 2+i$ , 则  $z_1 z_2 =$

- A.  $-5$                   B.  $5$                   C.  $-4+i$                   D.  $-4-i$

错解 未能把两复数对应点关于虚轴对称的几何特征合理转化为两个复数的关系, 从而产生错误.

剖析 由已知得  $z_2 = -2+i$ , 所以  $z_1 z_2 = -5$ , 故选 A.

例 9 (2015 年高考陕西卷·理 11) 设复数  $z = (x-1) + yi (x, y \in R)$ , 若  $|z| \leq 1$ , 则  $y \geq x$  的概率为

- A.  $\frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}$                   B.  $\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}$                   C.  $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}$                   D.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}$

错解 不能根据复数的几何意义得到动点  $(x, y)$  的轨迹图形, 从而致错.

剖析 由  $|z| \leq 1$ , 得到  $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ , 所以其几何图形是以  $(1, 0)$  为圆心, 1 为半径的圆及其内部, 又在该圆内部, 得到  $y \geq x$  部分对应的图形, 易得所求概率为

$$\frac{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}{\pi \times 1^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}, \text{ 故选 B.}$$

总之, 高考中对复数考查比较简单, 主要考查复数的基本概念、基本运算、复数的几何意义等<sup>[2]</sup>. 只要我们在解题时多注意辨析概念、细心运算、灵活处理几何意义, 复数问题就会迎刃而解.

#### 参考文献:

- [1] 蔡勇全. 透视高考考查复数的六大热点[J]. 理科考试研究, 2017(2): 3-6  
[2] 马汉敏. 高考中复数常考题型归类[J]. 基础教育论坛, 2010(7): 28