一定要联立吗

蔡海涛

解析几何是高考数学的重要考查内容，直线与圆锥曲线位置关系又是解析几何中常见的重要考查类型. 很多学生无法正确解答，往往是不知道设点的坐标还是直线方程，或是随便设一种形式，面对繁杂的运算最终难以完成. 还有些教师甚至指导学生遇到直线与圆锥曲线位置关系时，就是“联立”、“判别式”、“韦达定理”的三部曲. 笔者认为，设直线方程，与圆锥曲线方程联立，然后设而不求、整体代换，确实是常规套路，但是所有问题一定要联立吗？联立后又一定是整体代入吗？本文以近年来的高考题为例，谈谈这类问题处理的方法和策略.

1 大联立

例 1（2018 年高考全国Ⅰ卷·理 19）设椭圆$C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的右焦点为F，过F的直线l与C交于A,B两点，点M的坐标为$(2,0)$.

（1）当l与x轴垂直时，求直线AM的方程；

（2）设O为坐标原点，证明：$\angle OMA=\angle OMB$.

解（1）直线AM的方程为$y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}$或$y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}$.（过程略）

（2）当l与x轴重合时，$\angle OMA=\angle OMB=0^\circ$.

当l与x轴垂直时，OM为AB的垂直平分线，所以$\angle OMA=\angle OMB$.

当l与x轴不重合也不垂直时，设l的方程为$y=k(x-1)(k\neq 0)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

则$x_1<\sqrt{2},x_2<\sqrt{2}$，直线$MA,MB$的斜率之和为$k_{MA}+k_{MB}=\dfrac{y_1}{x_1-2}+\dfrac{y_2}{x_2-2}$.

由$y_1=kx_1-k,y_2=kx_2-k$得$k_{MA}+k_{MB}=\dfrac{2kx_1x_2-3k(x_1+x_2)+4k}{(x_1-2)(x_2-2)}$.

将$y=k(x-1)$代入$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$得$(2k^2+1)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$.

所以，$x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{2k^2+1},x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{2k^2+1}$.

则 $2kx_1x_2-3k(x_1+x_2)+4k=\dfrac{4k^3-4k-12k^3+8k^3+4k}{2k^2+1}=0$.

从而 $k_{MA}+k_{MB}=0$，故直线 MA,MB 的倾斜角互补，所以 $\angle OMA=\angle OMB$.

综上，$\angle OMA=\angle OMB$.

评注　直线与圆锥曲线位置关系问题，常常是先设直线方程，再把它与圆锥曲线方程联立，如果不好求交点坐标，一般是把已知条件或要解决问题进行坐标转化，利用韦达定理整体处理，用代数方法来解决几何问题. 这种处理方法叫“大联立”，适合于交点坐标较难求出的类型.

2 小联立

例 2（2016 年高考全国卷Ⅱ·理 19）已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{t}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的焦点在 x 轴上，A 是 E 的左顶点，斜率为 $k(k>0)$ 的直线交 E 于 A，M 两点，点 N 在 E 上，$MA\perp NA$.

（1）当 $t=4,|AM|=|AN|$ 时，求 $\triangle AMN$ 的面积；

（2）当 $2|AM|=|AN|$ 时，求 k 的取值范围.

解（1）　ΔAMN 的面积 $=2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{12}{7}\times\dfrac{12}{7}=\dfrac{144}{49}$.（过程略）

（2）由题意 $t>3$，$k>0$，$A\left(-\sqrt{t},0\right)$.

将直线 AM 的方程 $y=k(x+\sqrt{t})$ 代入 $\dfrac{x^2}{t}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 得

$\left(3+tk^2\right)x^2+2\sqrt{t}tk^2x+t^2k^2-3t=0$. 由 $x_1\cdot\left(-\sqrt{t}\right)=\dfrac{t^2k^2}{3+tk^2}$ 得 $x_1=\dfrac{\sqrt{t}\left(3-tk^2\right)}{3+tk^2}$，故

$|AM|=\left|x_1+\sqrt{t}\right|\sqrt{1+k^2}=\dfrac{6\sqrt{t\left(2+k^2\right)}}{3+tk^2}$.

由题设，直线 AN 的方程为 $y=-\dfrac{1}{k}\left(x+\sqrt{t}\right)$，故同理可得 $|AN|==\dfrac{6k\sqrt{t\left(1+k^2\right)}}{3k^2+t}$，

由 $2|AM|=|AN|$ 得 $\dfrac{2}{3+tk^2}=\dfrac{k}{3k^2+t}$，即 $\left(k^3-2\right)t=3k\left(2k-1\right)$.

当 $k=\sqrt[3]{2}$ 时上式不成立，

因此 $t=\dfrac{3k\left(2k-1\right)}{k^3-2}$. $t>3$ 等价于 $\dfrac{k^3-3k^2+k-2}{k^3-2}=\dfrac{\left(k-2\right)\left(k^2+1\right)}{k^3-2}<0$，

即 $\dfrac{k-2}{k^3-2}<0$，解得 $\sqrt[3]{2}<k<2$. 因此 k 的取值范围是 $\left(\sqrt[3]{2},2\right)$.

评注 本题与例 1 类似之处是设直线, 然后与圆锥曲线方程联立，区别之处是容易解出交点坐标. 这种处理方法叫“小联立”，适合于知道一个交点坐标的情况，可根据韦达定理求出另一个交点坐标. 往往这种类型已知一个点的横坐标为 1, 则可以利用韦达定理求出两根之积易得另一点坐标, 或是已知一个点的横坐标为 0, 则可以利用韦达定理求出两根之和易得另一点坐标, 一个点的纵坐标为 1 或 0 时情况类似.

3 不联立

例 3（2018 年高考全国Ⅲ卷 • 理 20）已知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 交于 A,B 两点，线段 AB 的中点为 $M(1,m)(m>0)$.

（1）证明：$k<-\dfrac{1}{2}$；

（2）设 F 为 C 的右焦点，P 为 C 上一点, 且 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\mathbf{0}$.

证明：$\left|\overrightarrow{FA}\right|,\left|\overrightarrow{FP}\right|,\left|\overrightarrow{FB}\right|$ 成等差数列，并求该数列的公差.

解（1）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $\dfrac{{x_1}^2}{4}+\dfrac{{y_1}^2}{3}=1,\dfrac{{x_2}^2}{4}+\dfrac{{y_2}^2}{3}=1$.

两式相减，并由 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k$ 得 $\dfrac{x_1+x_2}{4}+\dfrac{y_1+y_2}{3}\bullet k=0$.

由题设知 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=1,\dfrac{y_1+y_2}{2}=m$，于是 $k=-\dfrac{3}{4m}$. ①

由题设得 $0<m<\dfrac{3}{2}$，故 $k<-\dfrac{1}{2}$.

（2）数列的公差为 $\dfrac{3\sqrt{21}}{8}$ 或 $-\dfrac{3\sqrt{21}}{8}$. (过程略)

评注 本题解决的是求以 M 为中点的中点弦斜率的取值范围问题, 所以应该考虑 M 点的几何特征是这个点在椭圆内, 所以 $\dfrac{1^2}{4}+\dfrac{m^2}{3}<1$, 再利用“点差法”，范围问题得以解决. 这种处理方法叫“不联立”，一般地, 涉及弦中点或中点弦的问题，常用“点差法”不联立, 会使运算简化. 还有直线与抛物线位置关系问题, 常常也是设点, 不联立.

总之，以上三种方法是解决直线与圆锥曲线位置关系问题的常用方法，在具体应用时，应仔细分析，灵活选取.