圆锥曲线的三类弦问题

蔡海涛

解析几何是高考数学的重要考查内容，常作为试卷中高分选拔的试题.而直线与圆锥曲线位置关系问题又是解析几何中常见的重要类型,纵观近年来的高考题,圆锥曲线三类弦问题问题须引起我们关注,本文例谈这几类问题,并探究其求解策略.

在解决直线与圆锥曲线的弦长问题时，通常应用韦达定理与弦长公式.若涉及到“三类弦”（焦点弦、中点弦、原点弦）问题，则可根据各自的几何特征，简化运算，巧妙求解.

1.焦点弦

例1（2018年高考全国Ⅱ卷·理19）设抛物线C：$y^2=4x$的焦点为F，过F且斜率为$k(k>0)$的直线l与C交于A，B两点，$|AB|=8$.

（1）求l的方程；（2）求过点A，B且与C的准线相切的圆的方程.

解（1）由题意得$F(1,0)$，l的方程为$y=k(x-1)(k>0)$.

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由$\begin{cases} y=k(x-1), \\ y^2=4x \end{cases}$得$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$.

$\Delta=16k^2+16>0$，故$x_1+x_2=\dfrac{2k^2+4}{k^2}$.

所以$|AB|=|AF|+|BF|=(x_1+1)+(x_2+1)=\dfrac{4k^2+4}{k^2}$.

由题设知$\dfrac{4k^2+4}{k^2}=8$，解得$k=-1$（舍去），$k=1$.

因此l的方程为$y=x-1$.

（2）所求圆的方程为$(x-3)^2+(y-2)^2=16$或$(x-11)^2+(y+6)^2=144$.(过程略)

评注　本题直线l过焦点F，故$|AB|$的长即为焦点弦长，所以把$|AB|$转化为$|AF|$与$|BF|$两条焦半径的和，再利用定义，把这两条焦半径转化为到准线的距离，（1）步问题得以解决.一般地，焦点弦问题常常可以利用定义来解决，可使得运算简化，轻松求解.

2.中点弦

例2（2018年高考全国Ⅲ卷·理20）已知斜率为k的直线l与椭圆$C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$交于$A,B$两点，线段$AB$的中点为$M(1,m)(m>0)$.

（1）证明：$k<-\dfrac{1}{2}$；

（2）设 F 为 C 的右焦点，P 为 C 上一点,且 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\mathbf{0}$.

证明：$|\overrightarrow{FA}|,|\overrightarrow{FP}|,|\overrightarrow{FB}|$ 成等差数列，并求该数列的公差.

解（1）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1,\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$.

两式相减，并由 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k$ 得 $\frac{x_1+x_2}{4}+\frac{y_1+y_2}{3}\bullet k=0$.

由题设知 $\frac{x_1+x_2}{2}=1,\frac{y_1+y_2}{2}=m$，于是 $k=-\frac{3}{4m}$.①

由题设得 $0<m<\frac{3}{2}$，故 $k<-\frac{1}{2}$.

（2）数列的公差为 $\frac{3\sqrt{21}}{8}$ 或 $-\frac{3\sqrt{21}}{8}$.(过程略)

评注 与圆锥曲线的弦的中点有关问题,我们称之为圆锥曲线的中点弦问题.一般地，中点弦问题通常可以利用“点差法”，使得运算简化，快速解决问题.

3.原点弦

例 3 （2018 年高考天津卷·理 19）设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F，上顶点为 B．已知椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$，点 A 的坐标为 $(b,0)$，且 $|FB|\cdot|AB|=6\sqrt{2}$.

（1）求椭圆的方程;

（2）设直线 $l:y=kx(k>0)$ 与椭圆在第一象限的交点为 P，且 l 与直线 AB 交于点 Q.
若 $\frac{|AQ|}{|PQ|}=\frac{5\sqrt{2}}{4}\sin\angle AOQ$（$O$ 为原点），求 k 的值.

解（1）椭圆的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$．(过程略)

（2）设点 P 的坐标为 $(x_1,\ y_1)$，点 Q 的坐标为 $(x_2,\ y_2)$．由已知有 $y_1>y_2>0$，故 $|PQ|\sin\angle AOQ=y_1-y_2$．又因为 $|AQ|=\frac{y_2}{\sin\angle OAB}$，而 $\angle AOB=\frac{\pi}{4}$，故 $|AQ|=\sqrt{2}y_2$．由 $\frac{|AQ|}{|PQ|}=\frac{5\sqrt{2}}{4}\sin\angle AOQ$，可得 $5y_1=9y_2$.

由方程组$\begin{cases} y = kx, \\ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1, \end{cases}$消去$x$，可得$y_1 = \dfrac{6k}{\sqrt{9k^2+4}}$．易知直线$AB$的方程为$x + y - 2 = 0$，由方程组$\begin{cases} y = kx, \\ x + y - 2 = 0, \end{cases}$

消去x，可得$y_2 = \dfrac{2k}{k+1}$．由$5y_1 = 9y_2$，可得$5(k+1) = 3\sqrt{9k^2+4}$，两边平方，整理得$56k^2 - 50k + 11 = 0$，解得$k = \dfrac{1}{2}$，或$k = \dfrac{11}{28}$．

所以，k的值为$\dfrac{1}{2}$或 $\dfrac{11}{28}$.

评注　(2)中关键是对已知中$\dfrac{|AQ|}{|PQ|} = \dfrac{5\sqrt{2}}{4}\sin\angle AOQ$条件的转化, 转化为动点$P$与$Q$坐标间的关系, 体现了解析几何核心价值的考查, 即用代数的方法来解决几何的问题. 当转化为$5y_1 = 9y_2$时, 学生又面临新的困惑, 动点Q不是在椭圆上, 不能用常规套路先把直线与椭圆联立, 接着用韦达定理这条路走. 此时, 应注意到直线$l: y = kx(k > 0)$是一条过原点的直线, 只须直接联立直线l的方程与椭圆的方程不难得出P点坐标, 再联立直线l的方程与直线AB的方程得出Q点坐标. 这就是原点弦问题的特色, 联立方程, 直接求交点坐标, 未必是解析几何的常规套路“设而不求”. 有时还有注意到原点弦与椭圆（或双曲线）的两个交点关于原点对称，利用对称性可使运算简化.