以数解形精入微　以形助数达直观

——例析解析几何取值范围问题的两大求解策略

蔡海涛

作者简介：蔡海涛，(1975-　)，男，福建莆田，中学高级教师.福建省普通高中课程教学指导委员会委员，福建省名师工作室成员，福建省“十三五”中学数学学科带头人培养对象，主持三项省级课题，在省级以上刊物发表教学论文 20 多篇.

本文系福建省教育科学“十三五”规划课题“深度融合信息技术落实高中数学核心素养的实践研究”（课题编号：FJJKXB18-379）研究成果之一.

摘要：解析几何中取值范围与最值问题在高考中频频出现，该问题类型较多，解法灵活多变，但总体上主要有两种方法：一是利用代数方法，二是利用几何方法.

关键词:取值范围　代数方法　几何方法

解析几何是高中数学重要主干知识，也是高考重点考查内容.纵观近年来的高考题，取值范围与最值是解析几何中常见的考查问题，该问题类型较多，解法灵活多变，但总体上主要有两种方法：一是利用代数方法，即把要求最值的几何量或代数表达式表示为某个参数的函数，然后利用函数方法、不等式方法等进行求解；二是利用几何方法，即通过利用曲线的定义、几何性质以及平面几何中的定理、性质等进行求解.本文主要从数和形两个角度入手谈谈取值范围问题常见的求解策略，期与同行交流.

一、利用代数方法求取值范围

1.建立目标函数求范围

例 1（2018 年高考浙江卷·21）如图 1，已知点 P 是 y 轴左侧(不含 y 轴)一点，抛物线 $C:y^2=4x$ 上存在不同的两点 A,B 满足 PA,PB 的中点均在 C 上.

（1）设 AB 中点为 M，证明：PM 垂直于 y 轴；

（2）若 P 是半椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1(x<0)$ 上的动点，求 $\triangle PAB$ 面积的取值范围.

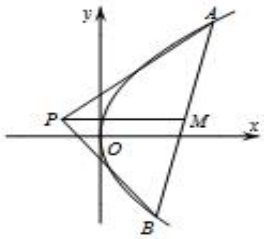


图1

解（1）略.

（2）设 $P(x_0,y_0),A(\dfrac{y_1^2}{4},y_1),B(\dfrac{y_2^2}{4},y_2)$，由（1）可知 $\begin{cases}y_1+y_2=2y_0,\\ y_1\cdot y_2=8x_0-y_0^2,\end{cases}$

所以 $|PM|=\dfrac{1}{8}(y_1^2+y_2^2)-x_0=\dfrac{3}{4}y_0^2-3x_0,|y_1-y_2|=2\sqrt{2(y_0^2-4x_0)}$.

因此，$\triangle PAB$ 的面积 $S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}|PM|\cdot|y_1-y_2|=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}(y_0^2-4x_0)^{\frac{3}{2}}$.

因为 $x_0^2+\frac{y_0^2}{4}=1(x_0<0)$，所以 $y_0^2-4x_0=-4x_0^2-4x_0+4\in[4,5]$.

因此，$\triangle PAB$ 面积的取值范围是 $\left[6\sqrt{2},\frac{15\sqrt{10}}{4}\right]$.

评注 解决圆锥曲线中取值范围问题的基本思想是建立目标函数和建立不等关系，根据目标函数和不等式求最值、范围. 因此这类问题的难点，就是如何建立目标函数和不等关系. 建立目标函数或不等关系的关键是选用一个合适变量，其原则是这个变量能够表达要解决的问题，这个变量可以是直线的斜率、直线的截距、点的坐标等，要根据问题的实际情况灵活处理. 另外, 要注意这个变量的取值范围, 即所求目标函数的定义域.

2. 根据判别式求范围

例 2(2015 高考山东卷 •理 20) 平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，左、右焦点分别是 F_1,F_2，以 F_1 为圆心，以 3 为半径的圆与以 F_2 为圆心，以 1 为半径的圆相交，交点在椭圆 C 上.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设椭圆 $E:\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1$，$P$ 为椭圆 C 上的任意一点，过点 P 的直线 $y=kx+m$ 交椭圆 E 于 A,B 两点，射线 PO 交椭圆 E 于点 Q.

（i）求 $\frac{|OQ|}{|OP|}$ 的值；（ii）求 ΔABQ 面积最大值.

解（1）椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.（过程略）

(2)（i）$\frac{|OQ|}{|OP|}=2$.（过程略）

（ii）点 $Q(-2x_0,-2y_0)$ 到直线 AB 距离等于原点 O 到直线 AB 距离的 3 倍,

$d=\frac{|-2kx_0-2y_0+m|}{\sqrt{1+k^2}}=3\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，$\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$，得 $x^2+4(kx+m)^2=16$，

即 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-16=0$.

$\Delta=64k^2m^2-16(4k^2+1)(m^2-4)=16(16k^2+4-m^2)>0$，……①

$|AB|=\frac{\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}\sqrt{16(16k^2+4-m^2)}$

$S_\Delta=\frac{1}{2}|AB|d=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{|m|}{1+4k^2}\cdot 4\sqrt{16k^2+4-m^2}=6\frac{|m|\sqrt{16k^2+4-m^2}}{1+4k^2}=6\sqrt{(4-\frac{m^2}{1+4k^2})\cdot\frac{m^2}{1+4k^2}}$

设 $t=\frac{|m|}{\sqrt{1+4k^2}}$，将 $y=kx+m$ 代入椭圆 C 的方程可得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$

由 $\Delta\ge 0$，可得 $m^2\le 1+4k^2$ ……②

由①②可知 $0<t\le 1$，则 $S_{\Delta}=6\sqrt{(4-t)t}$ 在 $(0,1]$ 为增函数，

于是当 $1+4k^2=m^2$ 时 $S_{\Delta\max}=6\sqrt{(4-1)\cdot 1}=6\sqrt{3}$，故 ΔABQ 面积最大值为 $6\sqrt{3}$.

评注 圆锥曲线取值范围问题中经常会涉及直线与圆锥曲线相交的情况，这种类型常常可以由直线 $y=kx+m$ 与曲线 C 联立，消元后得到 x 或 y 的一元二次方程，再由判别式大于 0，得到一个关于 k、m 的不等式，往往这个不等关系式是整个范围问题不等式的切入点，接下去只须寻找 k、m 的等量关系，则可得到 k（或 m）的取值范围，或是对 k、m 整体处理，得到关于 k、m 某个关系式的范围.

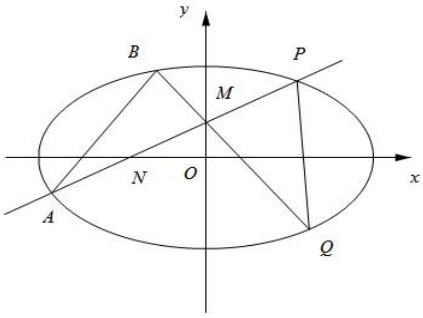
3. 利用不等式性质求范围

例 3(2016 年高考山东卷・文 21)

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴长为 4，焦距为 $2\sqrt{2}$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)过动点 $M(0,m)(m>0)$ 的直线交 x 轴与点 N，交 C 于点 A,P（P 在第一象限），且 M 是线段 PN 的中点. 过点 P 作 x 轴的垂线交 C 于另一点 Q，延长线 QM 交 C 于点 B.



(i)设直线 PM、QM 的斜率分别为 k、k'，证明 $\dfrac{k'}{k}$ 为定值.

(ii)求直线 AB 的斜率的最小值.

解(1)椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$.（过程略）

(2)(i) $\dfrac{k'}{k}$ 为定值 -3.（过程略）

(ii)设 $P(x_0,y_0),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

直线 PA 的方程为 $y=kx+m$，直线 QB 的方程为 $y=-3kx+m$.

联立 $\begin{cases} y=kx+m \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$，整理得 $(2k^2+1)x^2+4mkx+2m^2-4=0$.

由 $x_0x_1=\dfrac{2m^2-4}{2k^2+1}$ 可得 $x_1=\dfrac{2\left(m^2-2\right)}{\left(2k^2+1\right)x_0}$ ，所以 $y_1=kx_1+m=\dfrac{2k\left(m^2-2\right)}{\left(2k^2+1\right)x_0}+m$ ，

同理 $x_2=\dfrac{2\left(m^2-2\right)}{\left(18k^2+1\right)x_0},y_2=\dfrac{-6k\left(m^2-2\right)}{\left(18k^2+1\right)x_0}+m$.

所以 $x_2-x_1=\dfrac{2\left(m^2-2\right)}{\left(18k^2+1\right)x_0}-\dfrac{2\left(m^2-2\right)}{\left(2k^2+1\right)x_0}=\dfrac{-32k^2\left(m^2-2\right)}{\left(18k^2+1\right)\left(2k^2+1\right)x_0}$ ，

$y_2-y_1=\dfrac{-6k\left(m^2-2\right)}{\left(18k^2+1\right)x_0}+m-\dfrac{2\left(m^2-2\right)}{\left(2k^2+1\right)x_0}-m=\dfrac{-8k\left(6k^2+1\right)\left(m^2-2\right)}{\left(18k^2+1\right)\left(2k^2+1\right)x_0}$ ，

所以 $k_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{6k^2+1}{4k}=\dfrac{1}{4}\left(6k+\dfrac{1}{k}\right)$.

由 $m>0,x_0>0$，可知 $k>0$，所以 $6k+\dfrac{1}{k}\geq 2\sqrt{6}$ ，等号当且仅当 $k=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ 时取得.

此时 $\dfrac{m}{\sqrt{4-8m^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，即 $m=\dfrac{\sqrt{14}}{7}$，符号题意. 所以直线 AB 的斜率的最小值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

评注 本题对考生计算能力要求较高，是一道难题. 最后一步求取值范围，先通过联立直线方程与椭圆方程，得到 A、B 两点坐标，然后得到直线 AB 的斜率用 k 来进行表示，再利用基本不等式得到取值范围，易错点是复杂式子的变形能力不足.

二、利用几何方法求取值范围

1. 利用曲线的定义求范围

例 4（2015 高考福建卷 • 文 11）已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F . 短轴的一个端点为 M ，直线 $l:3x-4y=0$ 交椭圆 E 于 A,B 两点. 若 $|AF|+|BF|=4$，点 M 到直线 l 的距离不小于 $\dfrac{4}{5}$，则椭圆 E 的离心率的取值范围是（　）

A.$(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}]$　　B.$(0,\dfrac{3}{4}]$　C.$[\dfrac{\sqrt{3}}{2},1)$　　D.$[\dfrac{3}{4},1)$

解 设左焦点为 F', 连接 AF'、BF'. 则四边形 $BF'AF$ 是平行四边形, 故 $|AF'|=|BF|$, 所以 $|AF'|+|AF|=4=2a$, 则 $a=2$. 设 $M(0,b)$, 则 $\dfrac{4b}{5}\geq\dfrac{4}{5}$, 故 $b\geq 1$, 从而 $a^2-c^2\geq 1$, 所以 $0<c^2\leq 3,e\in\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$, 故选 A .

评注 与焦点有关的问题,一般考虑利用定义入手.由于已知只给出右焦点,故需结合左焦点,构建平行四边形$BF'AF$,从而利用定义得出a的值,本题的难点得以突破.

2.利用曲线的几何性质求范围

例5（2018年高考全国Ⅲ卷·理20）已知斜率为k的直线l与椭圆$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$交于$A,B$两点，线段$AB$的中点为$M(1,m)(m>0)$.

（1）证明：$k<-\frac{1}{2}$；

（2）设F为C的右焦点，P为C上一点,且$\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\mathbf{0}$.

证明：$|\overrightarrow{FA}|,|\overrightarrow{FP}|,|\overrightarrow{FB}|$成等差数列，并求该数列的公差.

解（1）设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1,\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$.

两式相减，并由$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k$得$\frac{x_1+x_2}{4}+\frac{y_1+y_2}{3}\bullet k=0$.

由题设知$\frac{x_1+x_2}{2}=1,\frac{y_1+y_2}{2}=m$，于是$k=-\frac{3}{4m}$.①

由题设得$0<m<\frac{3}{2}$，故$k<-\frac{1}{2}$.

（2）数列的公差为$\frac{3\sqrt{21}}{8}$或$-\frac{3\sqrt{21}}{8}$.(过程略)

评注 本题解决的是求以M为中点的中点弦斜率的取值范围问题,所以应该考虑M点的几何特征是这个点在椭圆内,所以$\frac{1^2}{4}+\frac{m^2}{3}<1$,这是本题解决范围问题的不等式的切入点,再利用“点差法”,范围问题得以解决.一般地,涉及曲线上或内部的动点求取值范围的问题,常常根据曲线上(或内部)的点的“有界性”,从而得到参数的取值范围.

3.平面几何的定理、性质

例6（2009年高考四川卷·理9）已知直线$l_1:4x-3y+6=0$和直线$l_2:x=-1$，抛物线$y^2=4x$上一动点P到直线l_1和直线l_2的距离之和的最小值是

A.2　　B.3　　C.$\frac{11}{5}$　　D.$\frac{37}{16}$

解 直线$l_2: x=-1$为抛物线$y^2=4x$的准线，由抛物线的定义知，P到l_2的距离等于P到抛物线的焦点$F(1,0)$的距离，故本题化为在抛物线$y^2=4x$上找一个点P使得P到点$F(1,0)$和直线l_2的距离之和最小，最小值为$F(1,0)$到直线$l_1: 4x-3y+6=0$的距离，即$d_{\min}=2$，故选择A.

评注 由于直线$l_2: x=-1$为抛物线$y^2=4x$的准线，故先根据定义把P到l_2的距离转化为P到抛物线的焦点$F(1,0)$的距离，再利用平几知识三角形中两边之和大于第三边，则当PF垂直l_1时取得最小值. 一般地, 利用几何图形的特征, 平几性质会使运算简化.