一道高三质检题的探究

蔡海涛

本文系福建省教育科学“十三五”规划课题《深度融合信息技术落实高中数学核心素养的实践研究》（课题编号：FJJKXB18-379）；福建省基础教育课程教学研究课题《高中数学主干知识教学落实核心素养的研究——以函数、立几、数列为例》（课题编号：MJYKT2018-056）研究成果之一.

1 试题呈现

（2019年福州市高三质检·文21）已知函数 $f(x)=a\ln x-x-\dfrac{a+1}{x}\ (a\in\mathbf{R})$.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）当 $e<a<2\sqrt{e}$ 时，关于 x 的方程 $f(ax)=-\dfrac{a+1}{ax}$ 有两个不同的实数解 x_1,x_2，求证：$x_1+x_2<4x_1x_2$.

2 试题分析

题目结构比较简单,以含对数函数及分式函数的初等函数为载体，与不等式相结合.试题分步设问,逐步推进,由浅及深,较好地达到了考查目的.第一问考查的是导数的应用,利用导数求函数的单调区间基础知识,考查运算求解能力,考查函数与方程思想、分类与整合思想等；第二问考查的是利用导数研究函数的最值、零点，证明不等式等基础知识,考查抽象概括能力、推理论证能力,考查化归与转化思想、函数与方程思想、分类与整合思想等.

3 解法赏析

试题的第二问涉及双参数问题的证明，方法较多，下例举几种常用方法，旨在抛砖引玉.

证法1 设 $g(x)=f(ax)+\dfrac{a+1}{ax}=a(\ln a+\ln x-x)$，所以 $g'(x)=\dfrac{a(1-x)}{x}\ (x>0)$，

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增；

当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减；所以 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值.

当 $e<a<2\sqrt{e}$ 时，方程 $f(ax)=-\dfrac{a+1}{ax}$ 有两个不同的实数解 x_1,x_2

所以函数 $g(x)$ 的两个不同的零点 x_1,x_2，一个零点比1小，一个零点比1大. 不妨设 $0<x_1<1<x_2$，

由 $g(x_1)=0$，且 $g(x_2)=0$，得 $x_1=\ln(ax_1)$，且 $x_2=\ln(ax_2)$，则 $x_1=\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{x_1}$，$x_2=\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{x_2}$，所以 $x_1x_2=\dfrac{1}{a^2}\mathrm{e}^{x_1+x_2}$，

所以 $\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}=\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{\mathrm{e}^{x_1+x_2}}{x_1+x_2}$，　令 $x_1+x_2=t$，　$h(t)=\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$，$h'(t)=\dfrac{\mathrm{e}^t\cdot t-\mathrm{e}^t}{t^2}=\dfrac{\mathrm{e}^t(t-1)}{t^2}$.

因为 $t=x_1+x_2, 0<x_1<1<x_2$，所以 $t>1$，所以 $h'(t)>0$，

所以函数 $h(t)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增， $h(t)>h(1)=\mathrm{e}$，所以 $\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}=\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\mathrm{e}^{(x_1+x_2)}}{x_1+x_2}>\dfrac{\mathrm{e}}{a^2}>\dfrac{\mathrm{e}}{4e}=\dfrac{1}{4}$，

又因为 $x_1+x_2>1$，所以 $x_1+x_2<4x_1x_2$.

评注 本法为参考答案的解法, 属于常规解法. 其思路即利用结构分析, 把要证明的不等式转化为证明 $\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}>\dfrac{1}{4}$, 把 x_1x_2、x_1+x_2 这两个式子看做一个整体, 因此考虑把其中一个式子转化另一个式子, 即 $x_1x_2=\dfrac{1}{a^2}\mathrm{e}^{x_1+x_2}$. 从而要证的不等式中只含有一个变量 x_1+x_2, 对其进行换元后, 通过构造函数不难得以证明. 双参数问题的处理往往寻找两个参数的关系, 再进行消元转化. 若把 x_1+x_2 用 x_1x_2 来替换, 同样可以构造一个新函数来证明, 本质是一样的, 如证法 2.

证法 2 同证法 1, $x_1=\ln(ax_1)$，且 $x_2=\ln(ax_2)$，则 $x_1+x_2=\ln(ax_1)+\ln(ax_2)=\ln(a^2x_1x_2)$，

$x_1+x_2-4x_1x_2=\ln(a^2x_1x_2)-4x_1x_2$, 令 $t=x_1x_2$, $h(t)=\ln(a^2t)-4t$, 因为 $0<x_1<1<x_2$, 所以 $t>0$,

$h'(t)=\dfrac{1-4t}{t}$, 所以 $h(t)$ 在 $(0,\dfrac{1}{4})$ 上单调递增, 在 $(\dfrac{1}{4},+\infty)$ 上单调递减. 因为 $e<a<2\sqrt{e}$,

所以 $h(t)_{\max}=h(\dfrac{1}{4})=\ln\dfrac{a^2}{4}-1=2\ln a-\ln 4-1<2\ln(2\sqrt{\mathrm{e}})-\ln 4-1=0$.

则 $x_1+x_2-4x_1x_2=\ln(a^2x_1x_2)-4x_1x_2<0$，$x_1+x_2<4x_1x_2$.

评注 本法思路与证法 1 类似, 把 x_1+x_2 用 x_1x_2 来替换, 区别之处是构造的函数中还有 a 这个参数, 因此得到构造函数的最值也含有 a, 要通过放缩进行转化.

证法 3 设 $g(x)=f(ax)+\dfrac{a+1}{ax}=a(\ln a+\ln x-x)$, 同证法 1 函数 $g(x)$ 的两个不同的零点 x_1,x_2，一个零点比 1 小，一个零点比 1 大. 不妨设 $0<x_1<1<x_2$，又 $g(\dfrac{1}{2})=a(\ln\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2})<a(\ln\dfrac{2\sqrt{e}}{2}-\dfrac{1}{2})=0$，

$g(1)>0$, 所以 $\dfrac{1}{2}<x_1<1$, $\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}<2+1=3<4$, 所以 $x_1+x_2<4x_1x_2$.

评注 本法思路是把 $\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}$ 转化为 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$, 利用零点存在性定理缩小 x_1 的范围为 $\dfrac{1}{2}<x_1<1$, 再利用不等式的基本性质加以证明.

证法 4 令 $x_1=t$, 则 $x_1+x_2-4x_1x_2=(1-4x_2)t+x_2$, 同证法 3 得 $\frac{1}{2}<t<1$,

令 $h(t)=(1-4x_2)t+x_2\quad(\frac{1}{2}<t<1)$, 因为 $x_2>1$, 所以 $h(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}-x_2<0$, $h(1)=1-3x_2<0$.

则 $h(t)<0$, 即 $x_1+x_2<4x_1x_2$.

评注 本法思路以双参数中一个参数 x_1 为主元, 构造以 x_1 为变量的函数. 在构造函数中, 主元的确定很重要, 本题也可构造成以 x_2 为变量的函数, 方法类似, 本文不再赘述.

4 试题变式

已知函数 $f\left(x\right)=x\ln x-x-\frac{1}{2}ax^2\left(a\in R\right)$，在定义域内有两个不同的极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$.

（1）求 a 的取值范围；（2）求证：$x_1+x_2>2e.$

略解（1）a 的取值范围为 $(0,\frac{1}{e})$；（过程略）

（2）由题意及（1）可知，即证 $x_1+x_2>\frac{2}{a}$, 因为 $\begin{cases}\ln x_1=ax_1\\ \ln x_2=ax_2\end{cases}$，所以 $a=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$，

即证 $x_2+x_1>\frac{2\left(x_2-x_1\right)}{\ln x_2-\ln x_1}(x_2>x_1>0)$, 即证 $\ln x_2-\ln x_1>\frac{2\left(x_2-x_1\right)}{x_2+x_1}(x_2>x_1>0)$，

设 $h\left(x\right)=\ln x-\frac{2\left(x-1\right)}{x+1}(x>1)$, 则 $h'\left(x\right)=\frac{1}{x}-\frac{4}{\left(x+1\right)^2}=\frac{\left(x-1\right)^2}{x\left(x+1\right)^2}>0,$

所以 $h\left(x\right)=\ln x-\frac{2\left(x-1\right)}{x+1}$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，所以 $h\left(x\right)>h\left(1\right)=0,\ln x>\frac{2\left(x-1\right)}{x+1}(x>1),$

令 $x=\frac{x_2}{x_1}>1$，则原不等式成立.

5 解后反思

在高考中, 函数与导数问题一般含有参数, 如果是双参数问题, 一般是想方设法把双元先通过换元或其它方法, 转化为一个变量问题, 再进行求解. 本文所提供的几种变形方法本质都是转化为一个变量函数问题.