数形巧结合　妙解离心率

——从 2019 年高考题中的离心率问题谈起

莆田第二中学 蔡海涛

本文系福建省教育科学“十三五”规划课题《深度融合信息技术落实高中数学核心素养的实践研究》（课题编号：FJJKXB18-379）.

纵观近几年的高考题，圆锥曲线中椭圆与双曲线的离心率问题一直是个热点问题.解决这类问题即求出$\frac{c}{a}$的值，实则是去寻找椭圆或双曲线中基本量a、b、c满足的关系式，只要求出任意两个基本量的关系，即可求出离心率的值.一般地，求解策略为利用圆锥曲线的定义与几何性质、结合方程、图形的几何特征等进行综合分析与处理，从而得以解决离心率的求值问题.[1]本文从 2019 年高考题中的离心率问题谈起，谈谈求解离心率问题的常见策略，期与同行交流.

一、考题分析

例 1　(2019 年高考全国Ⅰ卷·理 16) 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过$F_1$的直线与$C$的两条渐近线分别交于$A$，$B$两点．若$\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{F_1B}\bullet\overrightarrow{F_2B}=0$，则$C$的离心率为____.

解法 1： 如图 1，因为$\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$，且$\overrightarrow{F_1B}\bullet\overrightarrow{F_2B}=0$，所以$OA\perp F_1B$，

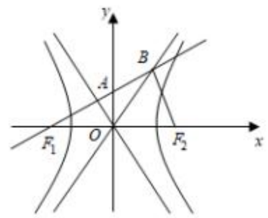

图1

则$F_1B:y=\frac{a}{b}(x+c)$，联立$\begin{cases}y=\frac{a}{b}(x+c)\\ y=\frac{b}{a}x\end{cases}$，

解得$B(\frac{a^2c}{b^2-a^2}$，$\frac{abc}{b^2-a^2})$，

则$|F_1B|^2=(\frac{a^2c}{b^2-a^2}+c)^2+(\frac{abc}{b^2-a^2})^2$，$|F_2B|^2=(\frac{a^2c}{b^2-a^2}-c)^2+(\frac{abc}{b^2-a^2})^2$，

所以$(\frac{a^2c}{b^2-a^2}+c)^2+(\frac{a^2c}{b^2-a^2}-c)^2+2(\frac{abc}{b^2-a^2})^2=4c^2$，

整理得：$b^2=3a^2$，所以$c^2-a^2=3a^2$，即$4a^2=c^2$，所以$\frac{c^2}{a^2}=4$，$e=\frac{c}{a}=2$.

评注： 法 1 的求解策略是根据双曲线的性质，是从$RT\triangle F_1F_2B$中去寻找基本量的等量关系，为了表示$|F_1B|$、$|F_2B|$，须先求出B点坐标，所以考虑根据已知条件先求出直线F_1B的方程，把它与直线F_2B方程联立，即可获解.此法思路直接，但运算量偏大.

解法 2： 如图 1，$\triangle F_1F_2B$中，因为A,O分别为F_1B,F_1F_2的中点，所以$AO\parallel BF_2$，

$\angle AOF_1=\angle BF_2F_1$. 又$\angle AOF_1=\angle BOF_2$，所以$\angle BOF_2=\angle BF_2F_1$，$BF_2=BO$．$RT\triangle F_1F_2B$中，

$BO=\frac{1}{2}F_1F_2=OF_2$，所以 $BF_2=BO=OF_2$，$\angle BOF_2=60^\circ$，则 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，可得 $e=\frac{c}{a}=2$.

评注：法 2 是利用几何图形的特征，通过平行及直角三角形的性质，得到$\triangle BOF_2$为正三角形，从而得到渐近线的斜率，进而求出离心率. 通过法 1 与法 2 的比较，可以发现，一般地，通过数形结合会使得运算简化.

例 2（2019 年高考全国Ⅱ卷·理 11）设 F 为双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点，O 为坐标原点，以 OF 为直径的圆与圆 $x^2+y^2=a^2$ 交于 P,Q 两点，若 $|PQ|=|OF|$，则 C 的离心率为

A.$\sqrt{2}$　　B.$\sqrt{3}$　　C.2　　D.$\sqrt{5}$

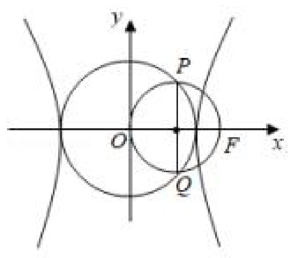

图2

解法 1：如图 2，

由题意，把 $x=\frac{c}{2}$ 代入 $x^2+y^2=a^2$，得 $PQ=2\sqrt{a^2-\frac{c^2}{4}}$，

再由 $|PQ|=|OF|$，得 $2\sqrt{a^2-\frac{c^2}{4}}=c$，即 $2a^2=c^2$，

所以 $\frac{c^2}{a^2}=2$，解得 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$.

评注：由题意画出图形，只须先求出$|PQ|$，再由 $|PQ|=|OF|$ 求出曲线 C 的离心率，其基本思路是利用代数方法，把直线 $x=\frac{c}{2}$ 的方程与圆 $x^2+y^2=a^2$ 的方程联立，得到 $|PQ|$，从而把 $|PQ|$、$|OF|$ 用基本量来表示，进而求得离心率.

解法 2：如图 2，依题意，PQ 为以 OF 为直径的圆的一条弦，因为$|PQ|=|OF|$，所以 PQ 必过以 OF 为直径的圆的圆心，不妨设为 O_1. 在 $RT\triangle OPO_1$ 中，$|OP|=a,|OO_1|=|O_1P|=\frac{c}{2}$，则 $a^2=(\frac{c}{2})^2+(\frac{c}{2})^2$，解得 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$.

评注：利用圆的几何性质，若弦长为直径长，则该弦必过圆心. 从而在 $RT\triangle OPO_1$ 中，可得 $|OP|=a,|OO_1|=|O_1P|=\frac{c}{2}$，再利用勾股定理得到基本量的关系，从而求得离心率. 根据圆的几何特征，达到运算简化目的.

例 3（2019 年高考天津卷·理 5）已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，若 l 与双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线分别交于点 A 和点 B，且 $|AB|=4|OF|$（O 为原点），则双曲线的离心率为

A.$\sqrt{2}$　　B.$\sqrt{3}$　　C.2　　D.$\sqrt{5}$

解法 1：l 的方程为 $x=-1$，双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，

故得 $A(-1,\frac{b}{a}),B(-1,-\frac{b}{a})$，所以 $|AB|=\frac{2b}{a}$，又 $|OF|=1$，所以 $\frac{2b}{a}=4$，即 $b=2a$，

所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{5}$.

评注: 本题考查抛物线、双曲线的性质等基础知识，考查双曲线的离心率的求法. 这是两种曲线组合型的圆锥曲线问题，一般从两曲线的公共点入手（点 A 和点 B），只需把 $|AB|=4|OF|$ 用 a,b,c 表示出来，又根据双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$，即可求得离心率.

解法 2： 设准线 l 与 x 轴交于点 M，因为 $|AB|=4|OF|$，所以 $2|AM|=4|OM|$，则在 $RT\triangle AMO$ 中，$\tan\angle AOM=\frac{AM}{MO}=\frac{1}{2}=\frac{b}{a}$，所以 $b=2a$，所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$.

评注: 利用双曲线图形的对称性及抛物线的几何性质，得到 $|AM|=2|OM|$，而 $\frac{AM}{MO}$ 的值又是双曲线一条渐近线的斜率，从而得到 $b=2a$，问题获解. 根据双曲线及抛物线的几何特征，把 $\tan\angle AOM$ 的值用基本量来表示，可使得运算简化.

二、方法提炼

通过以上 2019 年三道高考题的分析，不难发现求解圆锥曲线的离心率问题一般有两种方法，一种是代数方法，一种是几何方法.

代数方法是根据题目中的等量关系，往往构造出关于 a,c 的齐次方程，再转化为关于 e 的方程，然后求 e，[2]如：

例 4（2016 年高考山东卷 • 理 5）已知双曲线 E：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，若矩形 $ABCD$ 的四个顶点在 E 上，AB，CD 的中点为 E 的两个焦点，且 $2|AB|=3|BC|$，则 E 的离心率是______.

略解： 不妨设点 A 在第二象限，点 B 在第三象限，则由题意可得

$A(-c,\frac{b^2}{a}),B(-c,-\frac{b^2}{a})$，$C(c,-\frac{b^2}{a})$，$D(c,\frac{b^2}{a})$，由 $2|AB|=3|BC|$，

可得$2\cdot\dfrac{2b^2}{a}=3\cdot 2c$，化简得$2b^2=3ac$，即$2c^2-2a^2=3ac$，则$2e^2-3e-2=0$，解得$e=2$.

几何方法一般根据平面几何中相关图形的性质来构造关系，进而建立关于基本量的关系式，然后求得离心率，如：

例5（2018年高考全国Ⅱ卷·理12）已知F_1，F_2是椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的左，右焦点，$A$是$C$的左顶点，点$P$在过$A$且斜率为$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$的直线上，$\triangle PF_1F_2$为等腰三角形，$\angle F_1F_2P=120^\circ$，则$C$的离心率为

A.$\dfrac{2}{3}$　　B.$\dfrac{1}{2}$　　C.$\dfrac{1}{3}$　　D.$\dfrac{1}{4}$

略解：如图3，由$\triangle PF_1F_2$为等腰三角形，可得$P(2c,\sqrt{3}c)$，又$A(-a,0)$，所以$k_{AP}=\dfrac{\sqrt{3}c}{2c+a}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，即$a=4c$，所以$e=\dfrac{1}{4}$.

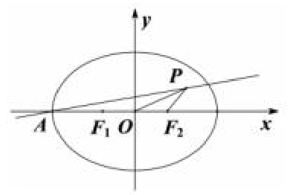

图3

三、结语

离心率是圆锥曲线的一个重要概念，它是描述圆锥曲线形状特征的一个主要元素，它的变化直接导致曲线类型和形状的变化．求解椭圆、双曲线离心率的问题，往往综合性较强，是圆锥曲线教学中的一个难点．学生常常找不到解决问题的切入点，不懂得如何利用椭圆、双曲线的定义及几何性质，或是结合图形特征，利用平面几何的有关结论来解决问题．[3]在高三的复习中，笔者建议通过圆锥曲线离心率微专题的复习，聚集高考题，归纳通性通法，使学生明确解决离心率问题的解题策略即为从数从形这两个角度来突破.高考题的经典之处在于一道试题往往可以从多个角度来思考获得正确的答案，我们教师在平时的教学中可以高考真题为载体，多鼓励学生发散思维，敢于思考，敢于挑战，从而提升学生的直观想象、逻辑推理与数学运算的数学核心素养.

参考文献：

[1]曹方瑜.对一道高考题的多解与变式研究[J].中学数学,2019(5):19-20.

[2]郭伟军.圆锥曲线的定义、方程与性质[J].中学数学教学参考(上旬),2019(1-2):115-117.

[3]李金聪.圆锥曲线的离心率问题的突破策略[J].数学教学,2019(6):39-43.