解三角形

福建省莆田第二中学　蔡海涛

纵观近年来高考题，“解三角形”是必考的内容，重点考查正弦定理和余弦定理及其应用。本专题特点总体难度适中，入手比较容易，但在具体解决问题时，学生稍有不慎，易造成“会而不对，对而不全”状况[1]。究其原因，主要有：公式记忆不准确；在三角变形中，转化不当，导致后续求解复杂或运算错误；思维不到位，定理应用欠思考；忽视三角形中的隐含条件，求边、角时忽略其范围。

基于学生解题中出现的问题，教师在本专题复习时，应根据考试大纲，夯实基础，查缺补漏，在做到知识“无盲区”的同时关注核心考点正、余弦定理应用的常用策略；客观题的求解分析应关注多思少算，避免小题大做，“隐性丢分”；解答题的求解应总结解题规律，注重通性通法，领会数学思想方法。

1　考点自诊　查缺补漏　（被全部删掉）

题组一

1-1 在锐角$\triangle ABC$中，若$C=2B$，则$\dfrac{c}{b}$的范围是（　　）

A.$(0,2)$　　B.$(\sqrt{2},2)$　　C.$(\sqrt{2},\sqrt{3})$　　D.$(1,\sqrt{3})$

1-2（2018年高考全国Ⅲ卷・理9）$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，若$\triangle ABC$的面积为$\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4}$，则$C=$（　　）

A.$\dfrac{\pi}{2}$　　B.$\dfrac{\pi}{3}$　　C.$\dfrac{\pi}{4}$　　D.$\dfrac{\pi}{6}$

1-3 (2019年高考浙江卷・14)在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=4$，$BC=3$，点D在线段AC上，若$\angle BDC=45^\circ$，则$BD=$____，$\cos\angle ABD=$________。

1-4 在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a,b,c，AB边上的高为h，若$c=2h$，则$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$的取值范围是__________。

思路探求：1-1 化角为边，$\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sin C}{\sin B}=2\cos B$，又$\triangle ABC$为锐角三角形，所以

$\begin{cases} 0<B<\dfrac{\pi}{2} \\ 0<C<\dfrac{\pi}{2} \\ B+C>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$，得 $\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{4}$，则 $\sqrt{2}<2\cos B<\sqrt{3}$。本题容易忽略锐角三角形中 $B+C>\dfrac{\pi}{2}$ 条件，导致角 B 范围扩大致误。

1-2　根据题意及三角形的面积公式知 $\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4}$，

所以 $\sin C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\cos C$，所以在 $\triangle ABC$ 中，$C=\dfrac{\pi}{4}$。

1-3　$\triangle ABD$ 中，由正弦定理有：$\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{BD}{\sin\angle BAC}$，而 $AB=4,\angle ADB=\dfrac{3\pi}{4}$，$AC=5$，$\sin\angle BAC=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{3}{5},\cos\angle BAC=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{4}{5}$，所以 $BD=\dfrac{12\sqrt{2}}{5}$。

$\cos\angle ABD=\cos(\angle BDC-\angle BAC)=\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\angle BAC+\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\angle BAC=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$。

1-4　由 $\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ch$ 得 $ab=\dfrac{ch}{\sin C}$，又 $a^2+b^2=c^2+2ab\cos C$，

所以 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}=\dfrac{c^2+2ab\cos C}{\dfrac{ch}{\sin C}}=\dfrac{\sin C(c^2+2\dfrac{ch}{\sin C}\cos C)}{ch}$

$=\dfrac{c\sin C+2h\cos C}{h}=2(\sin C+\cos C)=2\sqrt{2}\sin(C+\dfrac{\pi}{4})\le 2\sqrt{2}$，又 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\ge 2$，

所以 $2\le\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\le 2\sqrt{2}$。

该组试题旨在课前热身，驱动思维，先梳理基础必备知识，通过训练自诊筛查疑难问题，为本专题的学习做好准备。教师在指导学生复习备考时，要牢牢抓住基础知识和基本技能，回归教材，注重常规题型、注重通性通法，关注易错点。在此基础上，把学生的一些零散的知识点串起来，连成线、铺成面、织成网，构建“解三角形”的知识网络。

“不畏浮云遮望眼，只缘身在最高层”，教师在教学中要引导学生提升思想方法的高度，在面对千变万化的题目时游刃有余。

2　多思少算　小题巧解

题组二

2-1 在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a,b,c，若 $B=60^\circ,b=2$，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为________。

2-2　在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$AC=\sqrt{5}, BD\perp BC, BD=2BC$, 则 AD 的最小值为________。

思路探求： 2-1 由正弦定理得 $\triangle ABC$ 外接圆的直径 $2R=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ 为定值。设外接圆的圆心为 O，当 $BO\perp AC$ 时，$\triangle ABC$ 面积取得最大值。此时, $\triangle ABC$ 为正三角形，其面积易求得为 $\sqrt{3}$ 。

2-2 过 B 作 $BE\perp AB$, 且 $BE=\dfrac{1}{2}$，则 $\angle CBE=\angle ABD, AE=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$,

则有 $\triangle ABD\sim\triangle EBC$，所以

$$\frac{AD}{EC}=\frac{AB}{BE}=2, AD=2EC\geq 2(AC-AE)=2(\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}}{2})=\sqrt{5}\text{。}$$

当且仅当 A、E、C 三点共线时，等号成立，得 $AD_{\min}=\sqrt{5}$ 。

另法：由托勒密定理，$AD\bullet BC+AB\bullet DC\geq AC\bullet BD$，设 $BD=m$，则 $BC=\dfrac{m}{2}, CD=\dfrac{\sqrt{5}m}{2}$，$m\bullet AD+\sqrt{5}m\geq 2\sqrt{5}m$,所以 $AD\geq\sqrt{5}$,当且仅当 A、B、C、D 四点共圆时等号成立。（被全部删掉）

当前高考正在实现从能力立意到素养导向的转变，在客观题的考查中倡导多思少算，（删掉）该题组试题旨在训练学生解决客观题的能力，总结解决客观题的特殊方法。（删掉）一般地，在“解三角形”中的客观题，教师在教学过程中多引导学生先考虑已知条件中的几何背景，如：三角形的一条边与它的对角确定，则这个三角形的外接圆大小确定；若三角形的一个顶点（动点）到两个顶点（定点）的距离之比为常数，则这个动点的轨迹为阿波罗尼斯圆；求最值问题常用两边之和大于第三边或根据图形的对称性求解。“解三角形”问题的几何背景源自平面图形，很多问题都与向量、平面几何等知识关联，合理利用平面几何中的一些解题方法，是快速解决这类问题的常用策略。（删掉）

3　思想渗透　力求自然

3.1 边角互化

题组三

3-1　在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a,b,c，若 $A=\dfrac{\pi}{3}$，

$\dfrac{3\sin^2 C}{\cos C}=2\sin A\sin B$，且 $b=6$，求 c 的值。

3-2　（2019 年高考全国Ⅰ卷·理 17）$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a,b,c，设 $(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C$ 。

（1）求 A；（2）若 $\sqrt{2}a+b=2c$，求 $\sin C$。

思路探求：3-1 由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\times\frac{1}{2}=b^2+c^2-bc$，

又 $\frac{3\sin^2 C}{\cos C}=2\sin A\sin B$，由正弦定理可得 $\frac{3c^2}{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}=2ab$，即 $a^2+b^2-4c^2=0$，

则 $b^2+c^2-bc+b^2-4c^2=0$，又 $b=6$，所以 $c^2+2c-24=0$，解得 $c=4$。

3-2（1）由已知得 $\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A=\sin B\sin C$，故由正弦定理得

$b^2+c^2-a^2=bc$，由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$。

因为 $0^\circ<A<180^\circ$，所以 $A=60^\circ$。

（2）由（1）知 $B=120^\circ-C$，由题设及正弦定理得 $\sqrt{2}\sin A+\sin\left(120^\circ-C\right)=2\sin C$，

即 $\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C=2\sin C$，可得 $\cos\left(C+60^\circ\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由于 $0^\circ<C<120^\circ$，所以 $\sin\left(C+60^\circ\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故

$\sin C=\sin\left(C+60^\circ-60^\circ\right)=\sin\left(C+60^\circ\right)\cos 60^\circ-\cos\left(C+60^\circ\right)\sin 60^\circ$

$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$。

正、余弦定理应用的主要功能是实现三角形中的边角互化[2]。一般地，如果式子中含有角的余弦或边的二次式，要考虑用余弦定理；如果遇到的式子中含有角的正弦或边的齐次式时，则考虑用正弦定理；以上特征都不明显时，则要考虑两个定理都有可能用到。正、余弦定理的灵活应用要求学生深入领会化归与转化的思想，这需要学生在解题中多归纳、总结，抽象概括，总结出方法规律。

正、余弦定理应用还有一种类型是判断三角形的形状，常常考虑两个方向进行变形：一个方向是边，考虑代数变形，通常是正、余弦定理结合使用；另一个方向是角，考虑三角变形，通常是运用正弦定理。

3.2 函数方程

题组四

4-1 在△ABC 中，已知 $A:B=1:3$，角 C 的平分线将△ABC 分为5:2，求 $\sin A$ 的值。

4-2 在△ABC 中，已知 $B=\frac{\pi}{4}$，BC 边上的高等于 $\frac{1}{3}BC$，则 $\cos A=$_______。

思路探求：4-1　因为$\frac{AC}{CB}=\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{5}{2}$，所以$2\sin 3A=5\sin A$，则

$\sin 2A\cos A+\cos 2A\sin A=\frac{5}{2}\sin A$，化简得$2\cos^2 A+2\cos^2 A-1=\frac{5}{2}$

解得$\cos^2 A=\frac{7}{8},\sin A=\frac{\sqrt{2}}{4}$。

4-2　作BC边上的高AD，设$BD=x$，则$AD=x,CD=2x,AB=\sqrt{2}x,AC=\sqrt{5}x$，

在$\triangle ABC$中，由余弦定理易得$\cos A=-\frac{\sqrt{10}}{10}$。

函数方程思想是高中数学的重要思想方法之一，而三角函数是重要的一种初等函数，因此在解决“解三角形”问题时常常用到该思想方法。该题组试题注重对三角形中函数方程思想的应用，涉及求值或最值问题，要强化学生的函数方程意识，建构未知量的函数方程关系从而解决问题。同时，利用函数、方程、不等式解题时要注意变量范围的限制，特别要注意一些隐含条件的挖掘，缩小角的取值范围。

3.3 复杂图形

题组五

5-1 四边形$ABCD$为矩形，其中$AB=\sqrt{3},BC=1$，E为AB上一点，AC与DE相交于点F，若$DF=2FE$，则$\frac{\sin\angle DEA}{\sin\angle ADE}=$_________。

5-2 在$\triangle ABC$中，AB=2，$AC=3,\angle BAC=90^\circ$，点D在AB上，点E在CD上，且$\angle ACB=\angle DBE=\angle DEB$，则$CD=$_______。

思路探求：5-1 由已知易得$AB=\sqrt{3},BC=1$，所以$\angle CAB=\frac{\pi}{6},\angle DAC=\frac{\pi}{3}$，

在$\triangle ADF$中，$\frac{AF}{\sin\angle ADF}=\frac{DF}{\sin\angle DAF}$，所以$\sin\angle ADF=\frac{AF}{DF}\cdot\sin\angle DAF$，

在$\triangle AEF$中，$\frac{AF}{\sin\angle AEF}=\frac{EF}{\sin\angle EAF}$，所以$\sin\angle AEF=\frac{AF}{EF}\cdot\sin\angle EAF$，

所以$\frac{\sin\angle DEA}{\sin\angle ADE}=\frac{\frac{AF}{EF}\cdot\sin\angle EAF}{\frac{AF}{DF}\cdot\sin\angle DAF}=\frac{DF\cdot\sin\angle EAF}{EF\cdot\sin\angle DAF}=2\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$。

5-2　设$BD=x$，过点E作$EF\perp AB$于点F，设$\angle ACB=\angle DBE=\angle DEB=\theta$，则$\angle EDF=2\theta$，$DE=x$，因为$\tan\theta=\frac{2}{3}$，所以$\tan 2\theta=\frac{12}{5}$，则在RT$\triangle EFD$中，

$EF = x\sin 2\theta, DF = x\cos 2\theta$，因为 $\dfrac{EF}{AC} = \dfrac{DF}{AD}$，所以 $\dfrac{x\sin 2\theta}{3} = \dfrac{x\cos 2\theta}{2-x}$，

则 $\tan 2\theta = \dfrac{3}{2-x} = \dfrac{12}{5}$，解得 $x = \dfrac{3}{4}$，$AD = \dfrac{5}{4}$，所以 $CD = \dfrac{13}{4}$。

该题组试题所给的条件出现在不同的三角形中，先厘清图形中边、角的关系，把已知条件抽象概括后，一般有两个方向：（1）把已知量全部集中在一个三角形中，利用正、余弦定理求解；（2）已知量与未知量涉及两个或两个以上三角形，先考虑解条件够的三角形，再逐步解其他三角形，有时需要设出未知量，从几个三角形中列出方程（组），解方程（组）进行求解。

4　侧重综合　关注应用

题组六

6-1（2019 年高考全国III卷・理 18）$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a,b,c，已知 $a\sin\dfrac{A+C}{2} = b\sin A$。

（1）求 B；（2）若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，且 $c=1$，求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围。

6-2 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sqrt{3}\cos B}{b} = \dfrac{1}{2}$，且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\triangle ABC$ 的周长为______。

思路探求：6-1 （1）由题设及正弦定理得 $\sin A\sin\dfrac{A+C}{2} = \sin B\sin A$，

所以 $\sin\dfrac{A+C}{2} = \sin B$。由 $A+B+C=180^\circ$，可得 $\sin\dfrac{A+C}{2} = \cos\dfrac{B}{2}$，

故 $\cos\dfrac{B}{2} = 2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}$。因为 $\cos\dfrac{B}{2} \neq 0$，故 $\sin\dfrac{B}{2} = \dfrac{1}{2}$，因此 $B = 60^\circ$。

（2）由题设及（1）知 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a$。

由正弦定理得 $a = \dfrac{c\sin A}{\sin C} = \dfrac{\sin\left(120^\circ - C\right)}{\sin C} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\tan C} + \dfrac{1}{2}$。

由于 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，故 $0^\circ < A < 90^\circ, 0^\circ < C < 90^\circ$，由（1）知 $A + C = 120^\circ$，

所以 $30^\circ < C < 90^\circ$，故 $\dfrac{1}{2} < a < 2$，从而 $\dfrac{\sqrt{3}}{8} < S_{\triangle ABC} < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

因此，$\triangle ABC$ 面积的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{8},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$。

6-2 由正弦定理及 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sqrt{3}\cos B}{b}$ 得 $1=\frac{\sqrt{3}\cos B}{\sin B}$，所以 $\tan B=\sqrt{3}$，

又因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$，

又 $\frac{\sqrt{3}\cos B}{b}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3}}{b}=\frac{1}{2}$，$b=\sqrt{3}$，

由余弦定理得 $(\sqrt{3})^2=a^2+c^2-2ac\cos\frac{\pi}{3}$，$a^2+c^2-ac=3$。

又 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $ac=2$，$(a+c)^2=3ac+3=9$，$a+c=3$，

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $3+\sqrt{3}$。

解三角形的综合问题往往以三角形的面积、周长、外接圆半径等为载体，利用正、余弦定理计算求解三角形的边角关系，考查学生数学建模、逻辑推理、数学运算等素养[3]。三角形的面积公式常用的有：$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}r(a+b+c)$（其中 r 为三角形内切圆半径）；三角形的周长运算往往利用整体思想；求外接圆的半径常用到正弦定理。（删掉）该题组试题针对周长、面积等综合问题进行专项整理，实现专项突破。

解三角形还有一类综合问题是与平面向量、解析几何、立体几何、不等式、导数等知识的综合，有时也会出现实际应用问题，这些问题在复习中也要适当关注。（删掉）

5 反馈训练

1. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $b^2=ac$，$a^2+bc=c^2+ac$，求 $\frac{c}{b\sin B}$ 的值。

2. 在 $\triangle ABC$ 中，a、b、c 分别是内角 A、B、C 的对边，

且 $\sqrt{3}b\cos A=\sin A(a\cos C+c\cos A)$。

（1）求角 A 的大小；（2）若 $a=2\sqrt{3}$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{5\sqrt{3}}{4}$，求 $\triangle ABC$ 的周长。

3. 在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 上的点，AD 平分 $\angle BAC$，$\triangle ABD$ 面积是 $\triangle ADC$ 面积的 2 倍.

（1）求 $\frac{\sin B}{\sin C}$；

（2）若 $AD=1,DC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求 BD 和 AC 的长。

4. 已知锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，其外接圆半径 R 满足

$3R^2+2ac\cos B=a^2+c^2$.

（1）求B的大小；（2）已知$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{\sqrt{3}abc}{12}$，求$a+c$的取值范围。

5.在$\triangle ADE$中，B,C分别为AD,AE上的点，若$A=\dfrac{\pi}{3},AB=4,AC=16.$，（1）求$\sin\angle ABC$的值；（2）记$\triangle ABC$的面积为$S_1$，四边形$BCED$的面积为$S_2$，若$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{16}{33}$，求$BD\cdot CE$的最大值。

参考文献：

[1]吴晓英．微专题三 解三角形[J].中学数学教学参考:上旬,2017(1-2):55-66.

[2]范世祥.微专题三 解三角形[J].中学数学教学参考:上旬，2018(1-2):89-92.

[3]刘梅．解三角形[J].中学数学教学参考:上旬，2019(1-2):95-97.

反馈训练答案

1. 由已知得$b^2+c^2-a^2=bc$，所以$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，则$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

由$b^2=ac$，得$\sin^2 B=\sin A\cdot\sin C,\dfrac{\sin C}{\sin^2 B}=\dfrac{1}{\sin A}$，所以$\dfrac{c}{b\sin B}=\dfrac{\sin C}{\sin^2 B}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$。

2.（1）由已知得

$\sqrt{3}\sin B\cos A=\sin A(\sin A\cos C+\sin C\cos A)=\sin A\sin(A+C)=\sin A\sin B$，

即$\sqrt{3}\sin B\cos A=\sin A\sin B$，可得$\tan A=\sqrt{3}$，因为$A\in(0,\pi)$，所以$A=\dfrac{\pi}{3}$。

（2）因为$A=\dfrac{\pi}{3}$，$a=2\sqrt{3}$，$\triangle ABC$的面积为$\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$，

所以$\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$，则$bc=5$，

由余弦定理可得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

即$12=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc=(b+c)^2-15$，解得：$b+c=3\sqrt{3}$，

所以$\triangle ABC$的周长为$a+b+c=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=5\sqrt{3}$。

3.（1）$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD$，$S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot AD\sin\angle CAD$，

因为$S_{\triangle ABD}=2S_{\triangle ADC}$，$\angle BAD=\angle CAD$，所以$AB=2AC$。

由正弦定理可得$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2}$。

（2）因为$S_{\triangle ABD}:S_{\triangle ADC}=BD:DC$，所以$BD=\sqrt{2}$．在$\triangle ABD$和$\triangle ADC$中，

由余弦定理得$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos\angle ADB$，

$AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cos\angle ADC$。

$AB^2+2AC^2=3AD^2+BD^2+2DC^2=6$．由(1)知$AB=2AC$，所以$AC=1$。

4.(1)因为$3R^2+2ac\cos B=a^2+c^2$，所以$3R^2=a^2+c-^2 2ac\cos B=b^2$，$b=\sqrt{3}R$，

由正弦定理得$\frac{b}{\mathrm{sinB}}=2R$，$\sin B=\frac{b}{2R}=\frac{\sqrt{3}R}{2R}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又$B$为锐角，所以$B=\frac{\pi}{3}$。

（2）因为$\triangle ABC$的面积$S=\frac{\sqrt{3}abc}{12}=\frac{1}{2}ac\sin\frac{\pi}{3}$，所以$b=3$，$2R=2\sqrt{3}$，

$a+c=2R(\sin A+\sin C)=6\sin(\frac{\pi}{6}+A)$，由$\triangle ABC$是锐角三角形得$A\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$，

所以$\frac{\pi}{6}+A\in(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$，$\sin(\frac{\pi}{6}+A)\in(\frac{\sqrt{3}}{2},1]$，则$a+c\in(3\sqrt{3},6]$。

5.（1）在$\triangle ABC$中，由余弦定理可知$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$，

即$BC^2=4^2+16^2-2\cdot 4\cdot 16\cdot\frac{1}{2}=56,$ 所以$BC=4\sqrt{13}$。

由正弦定理得$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{BC}{\sin A}$，解得$\sin\angle ABC=\frac{2\sqrt{39}}{13}.$

（2）依题意$S_1=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=16\sqrt{3}$

又$\frac{S_1}{S_2}=\frac{16}{33}$，故$S_2=33\sqrt{3}$，$S_{\Delta ADE}=S_1+S_2=49\sqrt{3}$ 设$BD=x,CE=y$

则$S_{\Delta ADE}=\frac{1}{2}(4+x)(16+y)\sin\frac{\pi}{3}=49\sqrt{3}$，即$(4+x)(16+y)=196$

故$132-xy=16x+4y\geq 16\sqrt{xy}$，即$xy+16\sqrt{xy}-132\leq 0$，$(\sqrt{xy}-6)(\sqrt{xy}+22)\leq 0$

解得$\sqrt{xy}\leq 6$，故$xy\leq 36$。当且仅当$x=3,y=12$时等号成立，故$BD\cdot CE$的最大值为36。