解三角形中的面积问题

莆田第二中学　　蔡海涛

解三角形是初中解直角三角形的延伸，也是高中三角函数与平面向量交汇的重要载体，是高考必考内容.纵观近年来的高考题，解三角形问题中的面积问题频频出现.由于三角形的面积公式多，学生常常面对具体的图形无法选择合适的公式，导致无法正确求解，本文例谈几种常见类型，探究其求解策略，期对学生有所帮助.

一、利用正余弦定理

例 1（2019 年高考全国卷Ⅱ·理 15）$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c．若 $b=6,a=2c,B=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\triangle ABC$ 的面积为_________.

解 因为 $\cos B=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{4c^2+c^2-36}{4c^2}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $c=2\sqrt{3},a=4\sqrt{3}$，所以 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=6\sqrt{3}$．

例 2（2018 年高考全国卷Ⅰ·文 16）$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $b\sin C+c\sin B=4a\sin B\sin C$，$b^2+c^2-a^2=8$，则 $\triangle ABC$ 的面积为_________.

解 由 $b\sin C+c\sin B=4a\sin B\sin C$ 得，$\sin B\sin C+\sin C\sin B=4\sin A\sin B\sin C$，

因为 $\sin B\sin C\neq 0$，所以 $\sin A=\dfrac{1}{2}$，

因为 $b^2+c^2-a^2=8$，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}>0$，所以 $\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

所以 $bc=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$，所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$．

评析　在高考中，解三角形主要考查正余弦定理的应用，而求三角形的面积问题常常利用正弦定理求出边和角，再利用面积公式 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ 求得面积.

二、利用平面几何知识

例 3（2017 年高考新课标Ⅲ卷·理 17）ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=0$，$a=2\sqrt{7}$，$b=2$．

(1)求 c；

(2)设 D 为 BC 边上一点，且 $AD\perp AC$，求 ΔABD 的面积.

解（1）$c=4$（过程略）.

（2）依题意得 $\angle CAD=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\angle BAD=\angle BAC-\angle CAD=\dfrac{\pi}{6}$．

故ΔABD面积与ΔACD面积的比值为$\dfrac{\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{1}{2}AC\cdot AD}=1$.

又ΔABC的面积为$\frac{1}{2}\times 4\times 2\sin\angle BAC=2\sqrt{3}$，所以$\Delta ABD$的面积为$\sqrt{3}$.

评析 在(2)步中，若考虑利用面积公式$S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD$求面积, 则要先求出边$AB$的长, 虽然可在$\Delta ABD$或$\Delta ACD$中求得, 但都比较繁杂. 而注意到$S_{\Delta ABD}$与$S_{\Delta ACD}$的关系, 根据平几知识可得$S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}$, 问题则可轻松获解.

三、利用解析几何知识

例 4 ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$b=2,a=\sqrt{2}c$，求ΔABC面积的最大值.

解 （**法 1**）设 $c=x$, 则 $a=\sqrt{2}x, p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{2+x+\sqrt{2}x}{2}$，由海伦公式得

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}x+x}{2}\cdot\frac{2-\sqrt{2}x+x}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}x+x-2}{2}\cdot\frac{2+\sqrt{2}x-x}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{-x^4+24x^2-16}}{4}=\frac{\sqrt{-(x^2-12)^2+128}}{4}\le 2\sqrt{2}\text{, 由}\begin{cases}\sqrt{2}x+x>2\\ x+2>\sqrt{2}x\end{cases},$$

得$2\sqrt{2}-2<x<2\sqrt{2}+2$, 当且仅当$x=2\sqrt{3}$时等号成立.

（**法 2**）设$c=x$, 则$a=\sqrt{2}x$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=x\sqrt{1-\cos^2 A}=x\sqrt{1-\frac{x^2+4-2x^2}{4x}}=\frac{\sqrt{-x^4+24x^2-16}}{4}.$$

下同方法 1.

（**法 3**）以直线AC为x轴, AC的中点O为原点建立平面直角坐标系, 则

$A(-1,0),C(1,0)$, 设$B(x,y)$, 由$a=\sqrt{2}c$即$|BC|=\sqrt{2}|BA|$可得点B的轨迹方程为:

$(x-3)^2+y^2=8 \quad (y\ne 0)$. 故点$B$的轨迹为以$M(3,0)$为圆心, $2\sqrt{2}$为半径的圆

(除去与x轴的交点), 则当$BM\perp AC$时, $S_{\Delta ABC}$取得最大值.

此时, $BM=2\sqrt{2}$, $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BM=2\sqrt{2}.$

评析　本题已知三边的关系，入手较宽，但法 1 与法 2 的运算量都较大，故抓住这个三角形的几何特征，即 AC 边确定，故只须求出动点 B 到 AC 边的距离最值即可，而由 $|BC| = \sqrt{2}|BA|$ 可得动点 B 的轨迹是阿波罗尼斯圆（即平面内到两个定点的距离之比等于两已知不相等线段之比的动点的轨迹），从而本题获解. 以阿波罗尼斯圆为背景的试题在高考中多次出现.

例 5　ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $B = 60^\circ, b = 2$，则 ΔABC 面积的最大值为________.

解　（法 1）由余弦定理得 $4 = a^2 + c^2 - 2ac\cos 60^\circ = a^2 + c^2 - ac \geq 2ac - ac = ac$，

所以 $ac \leq 4$. 当且仅当 $a = c$ 时等号成立. $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}ac\sin B = \dfrac{\sqrt{3}}{4}ac \leq \sqrt{3}$，

即 $(S_{\Delta ABC})_{\max} = \sqrt{3}$.

（法 2）由正弦定理得 ΔABC 外接圆的直径 $2R = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ 为定值. 设外接圆的圆心为 O，当 $BO \perp AC$ 时，ΔABC 面积取得最大. 此时，ΔABC 为正三角形，最大值易求得为 $\sqrt{3}$.

评析　在 ΔABC 中，当一条边和这条边的对角确定时，这个三角形的外接圆大小确定，根据这个性质，可以使得解三角形问题简化.

由以上各例可以看出，解决三角形中的面积问题一般有两条途径，一条是从数入手，往往利用正余弦定理或海伦公式求解；另一条是从形观察，得到要求的三角形与已知三角形的关系，或是探究三角形中动点的轨迹，由几何图形的性质得到取得面积最值的条件，再求得最值. 这两条途径相得益彰，若能做到灵活应用，则不难解决三角形面积问题了.