例析处理恒成立与有解问题的若干策略

福建省莆田第二中学　谢新华

摘　要： 在方程或不等式中，常遇到恒成立与有解问题，在恒成立或有解条件下求参数的取值范围问题．此类问题渗透着换元、化归与转化、分类与整合、数形结合、函数与方程等思想方法. 其解题的基本思路是：根据已知条件将问题向基本类型转化，正确选用分离参数法、函数图像与性质法、数形结合法等解题方法求解．本文通过几个典型题目解析供参考.

关键词： 任意；存在；恒成立；有解

例 1　不等式 $x^2+ax+2a+5>0$ 在 $x\in R$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围.

解析 依题意由 $\Delta=a^2-4(2a+5)<0$ 得 $-2<a<10$，所以实数 a 的取值范围是 $(-2,10)$.

评析 本题化归为二次函数型问题，结合抛物线图像特征求解.一般地，设函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，则 $f(x)>0在x\in R$ 上恒成立 $\Leftrightarrow a=b=0,c>0$ 或 $a>0,\Delta<0$；$f(x)<0在x\in R$ 上恒成立 $\Leftrightarrow a=b=0,c<0$ 或 $a<0,\Delta<0$.

例 2　不等式 $x^2+ax+2a+5>0$ 在 $x\in(-2,+\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围.

解析 1 设 $f(x)=x^2+ax+2a+5,$ 由 $f(x)>0$ 在 $x\in(-2,+\infty)$ 上恒成立，所以 $\begin{cases}-\dfrac{a}{2}\le -2\\ f(-2)\ge 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-\dfrac{a}{2}>-2\\ \Delta<0\end{cases}$，解得 $a\ge 4$ 或 $-2<a<4$，即 $a>-2$，所以实数 a 的取值范围是 $(-2,+\infty)$.

解析 2 因为 $x^2+ax+2a+5>0$ 在 $x\in(-2,+\infty)$ 上恒成立，所以 $a>\dfrac{-x^2-5}{x+2}$ 在 $x\in(-2,+\infty)$ 上恒成立．令 $x+2=t(t>0),$ 所以

$$\frac{-x^2-5}{x+2}=\frac{-(t-2)^2-5}{t}=-(t+\frac{9}{t})+4\le -2\sqrt{t\cdot\frac{9}{t}}+4=-2$$，当且仅当 $t=3$ 即 $x=1$ 时等号成立，所以 $a>-2$，即实数 a 的取值范围是 $(-2,+\infty)$.

评析 解析 1 化归为二次函数型问题，结合抛物线图像特征求解. 一般地，（1）设 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$，$f(x)>0在x\in[\alpha,\beta]$ 上恒成立

$\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}<\alpha\\ f(\alpha)>0\end{cases}$或$\begin{cases}\alpha\le-\dfrac{b}{2a}\le\beta\\ \Delta<0\end{cases}$或$\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}>\beta\\ f(\beta)>0\end{cases}$；$f(x)<0$在$x\in[\alpha,\beta]$上恒成立$\Leftrightarrow\begin{cases}f(\alpha)<0\\ f(\beta)<0\end{cases}$. 解析 2 通过分离参数法，将问题转化为$a>g(x)$恒成立，再运用基本不等式求函数的最值，使问题获解.一般地，若不等式$A>f(x)$在区间D上恒成立，则等价于在区间D上$A>f_{\max}(x)$；若不等式$B>f(x)$在区间D上有解，则等价于在区间D上$B>f_{\min}(x)$.

例 3 不等式$x^2+ax+2a+5>0$在$a\in(-6,-2)$上恒成立，求实数x的取值范围.

解析 设$g(a)=(x+2)a+x^2+5,$ 由$g(a)>0$在$a\in(-6,-2)$上恒成立，所以$\begin{cases}g(-6)\ge0\\ g(-2)\ge0\end{cases}$，解得$x\le-1$或$x\ge7$，所以实数$x$的取值范围是$(-\infty,-1]\cup[7,+\infty)$.

评析 通过参变量转换化为一次函数型问题，利用一次函数的图像特征求解.一般地，已知函数$f(x)=kx+b,x\in[m,n]$，若$f(x)>0$恒成立$\Leftrightarrow\begin{cases}f(m)>0\\ f(n)>0\end{cases}$；若$f(x)<0$恒成立$\Leftrightarrow\begin{cases}f(m)<0\\ f(n)<0\end{cases}$.

例 4 已知函数$f(x)=x^2-2ax+1$，$g(x)=\dfrac{a}{x}$，其中$a>0$.

（1）$\forall x\in[1,2]$，都有$f(x)>g(x)$，求实数a的取值范围；

（2）$\forall x_1\in[1,2],\exists x_2\in[1,2]$，使得$f(x_1)>g(x_2)$，求实数$a$的取值范围.

解析（1）由$x^2-2ax+1>\dfrac{a}{x}$得$a<\dfrac{x^3+x}{2x^2+1}$对$\forall x\in[1,2]$恒成立，设$\varphi(x)=\dfrac{x^3+x}{2x^2+1}$，因为$\varphi'(x)=\dfrac{2x^4+x^2+1}{(2x^2+1)^2}>0$，所以$\varphi(x)$在$[1,2]$是增函数，所以$\varphi_{\min}(x)=\varphi(1)=\dfrac{2}{3}$，所以实数$a$的取值范围是$(0,\dfrac{2}{3})$.

（2）因为 $a>0$，所以$g(x)=\dfrac{a}{x}$在$[1,2]$是减函数，所以$g_{\min}(x)=\varphi(2)=\dfrac{a}{2}$.

当$0<a\le1$时，$f_{\min}(x)=f(1)=2-2a$，由$2-2a>\dfrac{a}{2}$得$a<\dfrac{4}{5}$，所以$0<a<\dfrac{4}{5}$.

当$1<a<2$时，$f_{\min}(x)=f(a)=-a^2+1$，因为$-a^2+1<0$，不符合题意舍去.

当$a\geq 2$时，$f_{\min}(x)=f(2)=5-4a$，由$5-4a>\frac{a}{2}$得$a<\frac{10}{9}$，不符合题意舍去.

所以实数a的取值范围是$(0,\frac{4}{5})$.

评析 第（1）问等价转化为函数$f(x)-g(x)>0$恒成立，接着通过分离参数法，将问题转化为$a<\varphi(x)$恒成立，再运用导数法求函数的最值，使问题获解. 第（2）问对不同变量对应的两个函数$f(x)$和$g(x)$分别求最值，即只需满足$f_{\min}(x)>g_{\min}(x)$即可获解.

例5 已知函数$f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x-2}(x>2)$，$g(x)=a^x(a>1,x>2)$.

（1）若$\exists x_0\in(2,+\infty)$, 使$f(x_0)=m$成立，求实数$m$的取值范围；

（2）若$\forall x_1\in(2,+\infty)$, $\exists x_2\in(2,+\infty)$, 使得$f(x_1)=g(x_2)$，求实数$a$的取值范围.

解析 （1）$f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x-2}=\frac{(x-2)^2+(x-2)+1}{x-2}=x-2+\frac{1}{x-2}+1$

因为$x>2$，所以$x-2+\frac{1}{x-2}+1\geq 2\sqrt{(x-2)\cdot\frac{1}{x-2}}+1=3$，当且仅当$x=3$时等号成立，故实数$m$的取值范围是$[3,+\infty)$.

（2）由（1）知函数$f(x)$的值域是$[3,+\infty)$，因为$a>1,x>2$，所以函数$g(x)$的值域是$(a^2,+\infty)$，因为$\forall x_1\in(2,+\infty)$, $\exists x_2\in(2,+\infty)$, 使得$f(x_1)=g(x_2)$，所以$[3,+\infty)\subseteq(a^2,+\infty)$，所以$\begin{cases}a>1\\a^2<3\end{cases}$，即$1<a<\sqrt{3}$，故实数$a$的取值范围是$(1,\sqrt{3})$.

评析 一般地，$\exists x\in D$, 使得$f(x)=m$，等价于m的取值范围是函数$f(x)$在D上的值域；对$\forall x_1\in D_1$, $\exists x_2\in D_2$, 使得$f(x_1)=g(x_2)$，等价于函数$f(x)$在D_1上的值域A是函数$g(x)$在在D_2上的值域B的子集，即$A\subseteq B$.

例 6 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$，$g(x)=ax-2a+2(a>0)$，若 $\exists x_1,x_2\in[3,4]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立，求实数 a 的取值范围.

解析 因为 $f'(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$，因为 $x\in[3,4]$，所以 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $[3,4]$ 为增函数，则 $f(3)\le f(x)\le f(4)$，即 $3\le f(x)\le\dfrac{7}{2}$，即 $f(x)$ 的值域为 $A=[3,\dfrac{7}{2}]$.

因为 $g(x)=ax-2a+2(a>0)$ 在 $[3,4]$ 为增函数，则 $g(3)\le g(x)\le g(4)$，即 $a+2\le g(x)\le 2a+2$，即 $g(x)$ 的值域为 $B=[a+2,2a+2]$.

因为 $\exists x_1,x_2\in[3,4]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立，所以 $A\cap B\ne\phi$，若 $A\cap B=\phi$，则 $\begin{cases}a>0\\2a+2<3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a>0\\a+2>\dfrac{7}{2}\end{cases}$，解得 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 或 $a>\dfrac{3}{2}$. 所以 $A\cap B\ne\phi$ 时，$\dfrac{1}{2}\le a\le\dfrac{3}{2}$.

所以实数 a 的取值范围是 $[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}]$.

评析 一般地，$\exists x_1\in D_1$，$\exists x_2\in D_2$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$，等价于函数 $f(x)$ 在 D_1 上的值域 A 与函数 $g(x)$ 在在 D_2 上的值域 B 的交集非空，即 $A\cap B\ne\phi$.

参考文献

[1]范镇宁.浅析不等式恒成立与有解问题[J].中学数学教学参考,2019(09):47-49.

[2]郑宇邻,马进才.双变量的“任意性问题”与“存在性问题”辨析[J].中学数学杂志,2019(01):36-38.

[3]骆秀金.高中数学含参数不等式恒成立、有解问题的求解策略[J].数理化解题研究,2017(25):26-27.

[4]仝玉强.巧用“任意性”和“存在性”求解函数中的双变量问题[J].中学数学教学参考,2016(25):29-31.