一道高三质检题的多解与探究

莆田第二中学　　蔡海涛

本文系福建省基础教育课程教学研究课题《高中数学主干知识教学落实核心素养的研究——以函数、立几、数列为例》（课题编号：MJYKT2018-056） 研究成果之一.

1 试题呈现

（2020 年泉州市高三质检·理 21）已知函数 $f(x)=(x^2+ax+1)e^x$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)若函数 $g(x)=(x^2+1)e^x-mx-1$ 在 $[-1,+\infty)$ 有两个零点，求 m 的取值范围.

2 试题分析

试题题干结构比较简单,以含二次函数及指数函数的初等函数为载体,与不等式相结合，主要考查导数的综合应用.第一问考查的是导数的应用，利用导数求函数的单调区间基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想、分类与整合思想等；第二问考查的是利用导数研究函数的最值、零点，不等式等基础知识，考查抽象概括能力、推理论证能力，考查化归与转化思想、函数与方程思想、分类与整合思想、数形结合思想、有限与无限思想以及特殊与一般思想，考查数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算、数学建模等核心素养.

3 解法赏析

试题的第二问涉及已知函数零点个数求参数的取值范围，下例举几种常用方法，旨在抛砖引玉.

法 1（略解）：由已知，$g'(x)=(x+1)^2e^x-m,$

①当 $m\le 0$ 时，$g'(x)\ge 0$，$g(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 单调递增，显然不合题意，舍去.

②当 $m>0$ 时，易得 $g'(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 单调递增，因为 $g'(0)=1-m, g(0)=0$.

(i)当 $m=1$ 时，$g'(0)=0$，则易知 $g(x)$ 在 $[-1,0)$ 单调递减，在 $[0,+\infty)$ 单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(0)=0$，则 $g(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 只有一个零点，不合题意，舍去.

(ii)当 $m>1$ 时，$g'(0)<0$，$g'(m)=(m+1)^2e^m-m>0, \exists x_0\in(0,m),$ 使得 $g'(x_0)=0,$

则 $g(x)$ 在 $[-1,x_0)$ 单调递减，在 $[x_0,+\infty)$ 单调递增，所以 $g(x_0)<g(0)=0,$

又 $g(m)=(m^2+1)e^m-m^2-1>(m^2+1)-m^2-1=0$，根据零点存在性定理，

$g(x)$ 在 (x_0,m) 有且只有一个零点，又 $g(x)$ 在 $[-1,x_0)$ 上有且只有一个零点，

故当 $m>1$ 时，$g(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 有两个零点.

(iii)当$0<m<1$时，$g'(-1)=-m<0, g'(0)>0$，$\exists x_0\in(-1,0)$，使得$g'(x_0)=0$,

则$g(x)$在$\left[-1,x_0\right)$单调递减，在$\left[x_0,+\infty\right)$单调递增，因为$g(x)$在$\left(x_0,+\infty\right)$有且只有一个零点 0，依题意知$g(x)$在$\left[-1,x_0\right)$有且只有一个零点.

又$g(x_0)<g(0)=0$, 所以$g(-1)\geq 0$, 解得$m\geq 1-\dfrac{2}{e}$, 则$1-\dfrac{2}{e}\leq m<1$.

综上，m的取值范围为$\left[1-\dfrac{2}{e},1\right)\cup(1,+\infty)$.

评注：首先对函数$g(x)$求导，研究其单调性，当$m\leq 0$时易得，当$m>0$时，注意到$g(0)=0$，故对$g'(0)$的符号进行讨论，结合零点存在性定理，确定函数$y=g'(x)$的零点x_0的范围，从而得到函数$g(x)$的单调性，结合零点个数分析其大致图象，进而求参数的取值范围.

法 2（略解）：同法 1，$g'(x)=(x+1)^2e^x-m$, $m\leq 0$时，不合题意，舍去.

当 $m>0$ 时，易得 $g'(x)$ 在 $\left[-1,+\infty\right)$ 单调递增，$g'(-1)=-m<0$，$g'(m)=(m+1)^2e^m-m>0, \exists x_0\in(-1,m)$, 使得$g'(x_0)=0$，即$(x_0+1)^2e^{x_0}=m$.

则$g(x)$在$\left[-1,x_0\right)$单调递减，在$\left[x_0,+\infty\right)$单调递增，$g(x)_{\min}=g(x_0)$.

又$g(m)=(m^2+1)e^m-m^2-1>(m^2+1)-m^2-1=0$, 依题意得$\begin{cases} g(-1)\geq 0 & (1) \\ g(x_0)<0 & (2) \end{cases}$

由(1)得$m\geq 1-\dfrac{2}{e}$. 由(2)化简得$(x_0^3+x_0^2+x_0-1)e^{x_0}+1>0$，

令$\varphi(x)=(x^3+x^2+x-1)e^x+1$，则$\varphi'(x)=x(x+1)(x+3)e^x$，

易知$\varphi(x)$在$\left[-1,0\right)$单调递减，在$\left[0,+\infty\right)$单调递增，$\varphi(x)_{\min}=\varphi(0)=0$，

所以当$x_0=0$，$m=1$时，（2）式不成立，所以由（2）得$m\neq 1$.

综上，m的取值范围为$\left[1-\dfrac{2}{e},1\right)\cup(1,+\infty)$.

评注：当$m\leq 0$时同解法 1，当$m>0$时，注意到$g'(x)$在$\left[-1,+\infty\right)$单调递增，结合零点存在性定理，得到函数$y=g'(x)$的唯一隐零点x_0，并得到关系式$(x_0+1)^2e^{x_0}=m$，从而得

到 $g(x)$ 的单调性，由零点个数得必要条件，进而求参数的取值范围. 法 1 与法 2 的基本思路一致，都是从分析讨论 $g(x)$ 的大致图象入手，区别之处在于法 1 先关注 $g(x)$ 的一个零点 0，法 2 先关注 $y=g'(x)$ 的隐零点 x_0，因入手点不同导致对参数讨论的切入点差异.

法 3（略解）：问题可以转化为函数 $h(x)=(x^2+1)e^x$ 与函数 $\varphi(x)=mx+1$ 的图象在 $\left[-1,+\infty\right)$ 上有两个不同的交点. 因为 $h'(x)=(x+1)^2e^x\geq 0$，$h''(x)=(x+1)(x+3)e^x\geq 0$，所以 $h(x)$ 在 $\left[-1,+\infty\right)$ 上单调递增且增长越来越快，又 $h(-1)=\dfrac{2}{e},h(0)=1$.

又 $\varphi(x)$ 的图象是一条过 $(0,1)$，斜率为 m 的直线. 所以 $m\geq\dfrac{1-\frac{2}{e}}{0-(-1)}=1-\dfrac{2}{e}$，又当 $m=1$ 时，直线 $y=mx+1$ 与函数 $h(x)=(x^2+1)e^x$ 相切，故 $m\neq 1$，所以 m 的取值范围为 $\left[1-\dfrac{2}{e},1\right)\cup(1,+\infty)$.

评注：本题对参数部分分离，转化为函数 $h(x)=(x^2+1)e^x$ 与函数 $\varphi(x)=mx+1$ 的图象的交点问题，一个函数不含参数容易求导，另一个含参函数的图象是一条直线，观察它们图象的变化趋势，找到临界的位置，易求得参数的取值范围，使得运算简化.

4 高考链接

已知函数的零点个数求参数的取值范围在近几年高考中频频出现，成为高考的热点问题. 下例举几道，以臻读者，解法从略.

题 1：（2016 年高考全国卷Ⅰ•理 21）已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 有两个零点.（1）求 a 的取值范围；（2）略.

题 2：（2017 年高考全国卷Ⅰ•理 21）已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x$.

(1)略；(2)若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

题 3：（2017 年高考全国卷Ⅲ•理 11）已知函数 $f(x)=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})$ 有唯一零点，则 $a=$

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

题 4：（2018 年高考全国卷Ⅰ·理 9）已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^{x}, & x\leqslant 0,\\ \ln x, & x>0,\end{cases}$

$g(x)=f(x)+x+a$．若 $g(x)$ 存在 2 个零点，则 a 的取值范围是

A.$[-1,0)$　　B.$[0,+\infty)$　　C.$[-1,+\infty)$　　D.$[1,+\infty)$

题 5：（2018 年高考全国卷Ⅱ·理 21）已知函数 $f(x)=e^{x}-ax^{2}$．

⑴略；⑵若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点，求 a．

5 方法归纳

已知函数的零点个数求参数的取值范围问题综合性较强,除了涉及函数零点存在性定理以外，一般还与函数的单调性、方程、不等式等知识有关，而这些知识与导数均有着密切的联系.因此这类问题的求解，往往利用导数这一工具结合函数与方程、分类与整合、数形结合、有限与无限等思想求解.

一般地，根据已知函数 $f(x)$（含参数 a）零点的个数，判断存在的条件进行求解，常有三种方法.一是讨论函数 $y=f(x)$ 的单调性，画出 $f(x)$ 的大致图象，再结合零点个数确定参数 a 的取值范围；二是分离参数 a，转化为函数 $y=g(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 交点的个数问题，进而确定参数 a 的取值范围；三是部分分离参数，转化为两个初等函数图象的交点个数问题.