多径探幽直通平行　一题多解提升素养

蔡海涛[1]　卓晓萍[2]　卢妮[3]　张靖毅[4]

本文系福建省基础教育课程教学研究课题《高中数学主干知识教学落实核心素养的研究——以函数、立几、数列为例》（课题编号：MJYKT2018-056）研究成果之一.

解题教学是中学数学课堂的重要组成部分.哈尔莫斯说过:“数学真正组成部分应该是问题和解，解题才是数学的心脏.”可见，解题教学的重要性.那么在解题教学中，师生应扮演怎样的角色?[1]笔者认为，解题教学教师应精选例题，引导学生从不同视角、不同方向进行观察、类比、联想，尝试一题多解.学生在解题过程中，提炼思想方法，领悟数学之美，提升核心素养.文章以一道证明线面平行的问题来阐述借助一题多解提升学生的核心素养.

一、题目

如图1，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是菱形,G是PC的中点,点E在PD上，且$\dfrac{PE}{ED}=2$.

证明:$BG//$平面ACE.

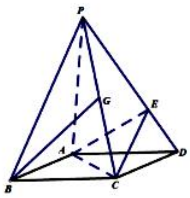

图1

本题是线面平行证明题，解决此类问题一般是利用线线平行或面面平行证明线面平行，线线平行证法的难点是找到平行直线，面面平行证法的难点是构造平行平面.课堂上，经教师启发，同学讨论，许多同学纷纷展示自己的思路，笔者整理了其中具有代表性的10种方法，加以归类评析.

二、解法探析

思维角度1：利用线线平行证明线面平行

法一:(方嘉榕同学提供）如图2，取CD中点F,连接GF，BF，设BF交AC于O点，GF交EC于H点.

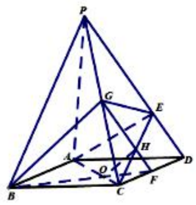

图2

则$FG//DP$，$\dfrac{CH}{CE}=\dfrac{GH}{PE}=\dfrac{FH}{DE}$，故$\dfrac{GH}{FH}=\dfrac{PE}{DE}=2$.

在菱形$ABCD$中，$\dfrac{BO}{OF}=\dfrac{AB}{CF}=2$，所以$\dfrac{GH}{FH}=\dfrac{BO}{OF}$,$BG//OH$.

又$BG\not\subset$面ACE,$OH\subset$面ACE，所以$BG//$平面ACE.

法二:(郭唯恩同学提供）如图3，取CG中点F,取BC中点H,过E作$EM//CD$交CG于M，过F作$FN//CD$交CE于N.连接BD交AC于O.

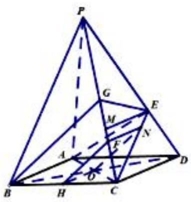

图3

则$OH//CD$，且$OH=\dfrac{1}{2}CD$.又$ME//CD//FN$,所以$\dfrac{FN}{ME}=\dfrac{CF}{CM}$.

$\triangle PCD$中，$\dfrac{FN}{ME}=\dfrac{CF}{CM}=\dfrac{\frac{1}{4}PC}{\frac{1}{3}PC}=\dfrac{3}{4}$.又$\dfrac{ME}{CD}=\dfrac{PE}{PD}=\dfrac{2}{3}$,

所以$ME=\dfrac{2}{3}CD$，则$FN=\dfrac{3}{4}ME=\dfrac{1}{2}CD$.所以$OH//FN$，且$OH=FN$.

所以四边形 $FNOH$ 为平行四边形. 所以 $ON // FH$.

又因为在 $\triangle BCG$ 中， $BG // FH$, 所以 $ON // BG$.

又 $BG \not\subset$ 面 ACE， $ON \subset$ 面 ACE，所以 $BG //$ 平面 ACE .

法三:（柳少东同学提供）如图 4, 在 PC , BC , AC 上各取一点 F , Q , R , 使得 $\frac{FP}{FC}=\frac{CQ}{BQ}=\frac{CR}{AR}=2$. 连接 EF , FQ , QR , 因为 $\frac{FP}{FC}=\frac{PE}{DE}=2$, 所以 $EF // CD$. 同理， $\frac{QR}{AB}=\frac{2}{3}$， $QR // AB$, 又因为 $AB // CD$ 且 $AB = CD$. 所以 $QR // EF$ 且 $QR = EF$ ，

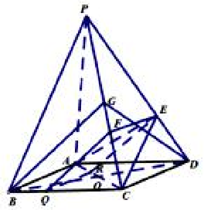

图 4

则四边形 $EFQR$ 为平行四边形，所以 $ER // QF$. 又 $QF // BG$ ，
所以 $BG // ER$. 又 $BG \not\subset$ 面 ACE ， $ER \subset$ 面 ACE ,
所以 $BG //$ 平面 ACE .

法四:（余明达同学提供）如图 5， 取 AB 中点 J , PD 中点 H , 连接 GH , JH , JD , JD 交 AC 于 K , 连接 KE , 则 $GH // CD$, 且 $GH=\frac{1}{2}CD$； $BJ // CD$ 且 $BJ=\frac{1}{2}CD$, 所以 $GH // BJ$ ，

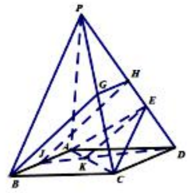

图 5

且 $GH = BJ$. 所以四边形 $BJHG$ 为平行四边形.
所以 $JH // BG$ ， 且 $JH = BG$.

因为 $\frac{DE}{DH}=\frac{\frac{1}{3}PD}{\frac{1}{2}PD}=\frac{2}{3}$, 又 $\frac{DK}{DJ}=\frac{2}{3}$, 所以 $JH // KE$ ， 则 $BG // EK$,

又 $BG \not\subset$ 面 ACE , $EK \subset$ 面 ACE , 所以 $BG //$ 平面 ACE .

评析: 以上方法均是通过线线平行证明线面平行. 法 1 构建平面 BGF ， 得平面 $BGF \cap$ 平面 $ACE = OH$ ， 进而证明 $BG // OH$ 即可，过 BG 做一平面与平面 ACE 相交的方法有较强的技巧性. 因为 G 是 PC 的中点, 故取 CD 中点 F , 由此利用中位线得平行关系，“中点找中点”的方法是解决平行问题的常用策略. 法二、法三、法四均是构建平行四边形来证明线线平行.

受法一的启发，一部分同学得到以下思路: 如图 6，连接 BD 交 AC 于 O , 连接 GD 交 EC 于 F ， 只须证明 $BG // OF$ 即可，即证 F 为 GD 的中点，下面展示几位同学的思路:

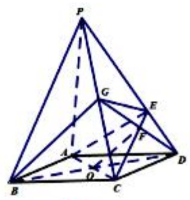

图 6

法五:（陈怡寒同学提供）如图 6, 由于 E 是 PD 的三等分点, 故 $S_{\triangle PCE}:S_{\triangle CED}=2:1$. 又 G 线段 PC 的中点, 故 $S_{\triangle PEG}=S_{\triangle CEG}$. 故 $S_{\triangle EGC}=S_{\triangle EDC}$. 则 $\triangle EGC$ 中 EC 边上的高与 $\triangle EDC$ 中 EC 边上的高相等，易证 $GF = DF$, 即 F 为 GD 的中点.

法六:（陈怡寒同学提供）如图 7, 延长 CE 至 H ， 且 $\frac{CE}{HE}=2$. 连接 PH 交 CD 于 I .

因为 $\frac{PE}{ED}=2=\frac{CE}{HE}$, 所以 E 为 $\triangle PCI$ 重心，

所以 D ， H 分别为 CI ， PI 的中点.

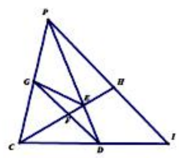

图 7

所以$GD/\!/PI$，即F为GD的中点.

法七:(黄林同学提供)如图 8, 延长FG至H, 使$PH/\!/CE$, 连接PH. 因为$PH/\!/CE$, $PG=CG$, 所以$HG=FG$.

又$\dfrac{DF}{DH}=\dfrac{DE}{DP}=\dfrac{1}{3}$. 又$GH=GF$, 所以$DF=GF$, 即$F$为$GD$的中点.

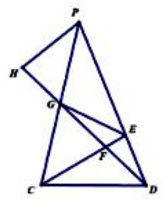

图 8

法八:(陈伟同学提供)如图 9, 取PD中点M, 延长GM与CE交于N. 由于E是PD的三等分点, 所以$\dfrac{ME}{ED}=\dfrac{1}{2}$. 又$GN/\!/CD$, 所以$\dfrac{MN}{CD}=\dfrac{ME}{ED}=\dfrac{1}{2}$. 所以$GM=MN=\dfrac{1}{2}CD$. 所以$GN=GM+MN=CD$. 所以$\dfrac{GF}{DF}=\dfrac{GN}{CD}=1$, 即$F$为$GD$的中点.

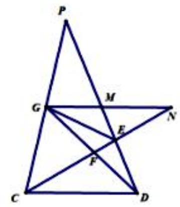

图 9

评析:以上四种方法利用平面几何方法证明F为GD的中点，需要一定平面几何的功底，充分利用图形的比例关系，通过相似或全等等几何关系给出证明.

思维角度 2：利用面面平行证明线面平行

法九:（陈雨翔同学提供）如图10, 连接BD, 交AC于O点, 取PE中点F. 由已知易得O为BD中点，E为DF中点.

故在$\triangle BDF$中，$OE/\!/BF$. 同理，$CE/\!/FG$，

又因为且BF，$FG\not\subset$平面ACE，OE，$CE\subset$平面ACE，

所以$BF/\!/$平面ACE, $FG/\!/$平面ACE, 又$BF\bigcap FG=F$，

所以平面$ACE/\!/$平面BFG.

又$BG\subset$面BFG, 所以$BG/\!/$平面ACE.

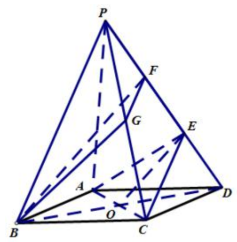

图 10

评析:利用线线平行证明线面平行有时会不易找到平行直线，此时可考虑构建面面平行得线面平行. 这就要求学生熟练掌握线线平行、线面平行及面面平行三者之间的转化关系，做到“心中有图”，解题时“有型可依”，析题时方可“路线清晰”.

思维角度 3：利用向量工具证明线面平行

受法五启发，要证F为GD的中点，也可用向量工具证之，方法如下：

法十:(郑奕佳同学提供) 取GD中点M,

因为$\overrightarrow{PM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{PD}\right)=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{PC}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{PE}$, 所以$M$，$C$，$E$共线，则$F$与$M$重合，即$F$为$GD$的中点.

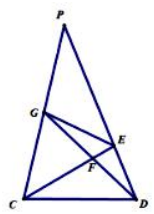

图 11

评析:此法利用平面向量方法, 巧妙地避开了几何证明上的思路难点，方法简洁优美，体现了向量的工具性.

以上证明方法虽然较多，但归结线面平行的几何法证明思路只有两种:(1)线线平行$\Rightarrow$线面平行；(2) 面面平行$\Rightarrow$线面平行. 两种方法的核心都是发现“线线平行”，这需要充分利用图中线段的长度关系，常见的方法有：“中点找中点得中位线”、“平行线分线段成比例”、“构造平行四边形”等. 同时，我们还须关注向量这个有力的的工具，方法有：利用两个向量共线证明线线平行，建立空间坐标系证明直线的方向向量与平面的法向量垂直等.

三、教学反思

1.意外的“一题一课”带来了什么

本文这道例题的教学是笔者一节习题课的实录，课堂中学生提供了这么多种不同的证法，让笔者始料未及.由于笔者为鼓励学生的积极性，让学生充分地展示多种解法，导致这节课预设的进度没有完成，造就了一节没有预设的“一题一课”.这个美丽的意外让笔者可喜地发现到：这是一节课堂气氛活跃的习题课，很多学生在展示解法中得到自信，没有在课堂上提供解法的学生也从中得到启发，拓宽了解题的思维，在方法的整理中更深刻地理解了线面平行的本质.课后，笔者安排本文的作者之一张靖毅同学负责整理以上的十种方法，通过整理之后，他坦言对“线面平行”的证明问题理解透彻了许多.

日本的数学家米山国藏说过:“学生在学校所学到的数学知识在进入社会后，几乎没有什么机会应用.然而不管他们从事什么职业，那种铭刻于头脑中的数学精神、数学的思维方法、研究方法、推理方法和着眼点，使他们受益终身.”关于什么是数学精神，米山国藏没有做出具体的解读，笔者认为:这就是核心素养.而“一题一课”是解题教学中一种不错的尝试，教师采用启发式教学法，激发、诱导学生积极思维，促使他们尽可能有自己的发现，发现一道题目的背景、解法、变式拓展等，从而培育学生的数学精神，发展学生的核心素养.

2.归纳解题方法，突出数学本质

本节例题是“线面平行”证明的问题，它与“线线平行”、“面面平行”密不可分，这三者之间可以互相转化，即“线面平行”、“面面平行”的判定与性质定理的理解与应用.这三者关系处理的策略亦可类比到“线线垂直”“线面垂直”、“面面垂直”之间的关系.再从“上位”来看，立体几何所研究图形的关系即“空间”与“平面”之间的互相转化.

解题教学过程中，学生提供多种解法固然可喜，但教师如果没有对解题方法进行归纳，思想上进行引领，学生则容易形成“只见树木不见森林”的学习状况，从而导致学习迁移能力较低.基于突出数学本质、关注核心素养落地的解题教学设计，不应局限在解题方法的展示，更应引导学生课中、课外注重知识背后的数学思想、方法的贯通，注重形、数之间的结合，引导学生进行学习内容逻辑线索的梳理，强化在数学实践活动中综合运用数学知识的能力，从不同角度思考问题，由此建立起知识体系，从而能以一览众山小的姿态来看待数学问题.

3.挖掘立体几何教育价值提升素养

立体几何的学习，应当培养、发展学生的空间想象能力，并在初中学习平面几何的基础上进一步完善公理化思想，发展直观想象和逻辑推理的素养.

本节“线面平行”的证明是通过观察、分析，找“平行直线”或构“平行平面”，发展学生直观想象的素养；在推理论证中通过应用直线和平面平行的判定定理、平面与平面平行的性质定理，揭示直线与直线、直线与平面、平面与平面之间的平行关系可以相互转化，发展学生逻辑推理的素养. 由此说明学生在解决一个问题中要综合运用几种数学核心素养，这体现数学核心素养整体性和关联性.另一方面，学生不同的解法体现学生核心素养的水平差异[2].在平时的教学中，教师需要引导学生对各种解法进行比较，分析各种解法的思想方法差异和方法选择的优劣，进行解后反思，这是提升学生核心素养的重要途径.

参考文献:

[1]章建跃.章建跃数学教育随想录(下卷)[M].杭州:浙江教育出版社,2019.

[2]夏繁军，韩新生.“一题多解”诸春秋 “核心素养”现水平[J].中国数学教育，2020(1-2):116-128.