动中探定量 动中生精彩

——例析动态三角形中的取值范围问题求解策略

莆田第二中学　　蔡海涛

纵观近几年高考解三角形试题，动态三角形问题频频出现，这类问题呈现形式丰富多彩，图形特征因点的运动变化精彩纷呈，因“运动”而精彩[1]，在动中探求定量的过程中彰显数学之美，令人赏心悦目. 这类问题具有一定的综合性、交汇性，解题入口比较宽、方法多样，有一定的趣味性.

一、谋“定”后“动”

在“动”的条件中去探究最值这个“定”的结果，先探究动点运动变化的规律，从中得到“定”的的规律，即得到动点运动变化的轨迹，进而求变量的取值范围. 这种谋“定”后“动”的解题策略，一般可以通过数形结合，得到取得最值的位置，求解过程简洁明了. 学生在观察图形的运动变化中、数与形的巧妙结合中领略数学的魅力，体会数学的和谐美.

例 1 在$\triangle ABC$中，角 A，B，C 的对边分别为a,b,c，若$B=60^\circ,b=2$，则$\triangle ABC$面积的最大值为________.

解析　由正弦定理得$\triangle ABC$外接圆的直径$2R=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$为定值. 设该外接圆的圆心为$O$，当$BO\perp AC$时，$\triangle ABC$面积取得最大. 此时, $\triangle ABC$为正三角形，最大值易求得为$\sqrt{3}$.

评析　在本题中，AC边定，由于它的对角B也定，所以$\triangle ABC$的外接圆的大小确定. 一般地，在$\triangle ABC$中, 当一条边和它的对角确定时, 这个三角形的外接圆大小确定，根据这个性质，可以使解三角形问题简化.

例 2　$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$b=2,a=\sqrt{2}c$，求$\triangle ABC$面积的最大值.

解析　以直线AC为x轴, AC的中点O为原点建立平面直角坐标系，

易得点B的轨迹方程为: $(x-3)^2+y^2=8\quad(y\neq 0)$.

故点B的轨迹为以$M(3,0)$为圆心, $2\sqrt{2}$为半径的圆(除去与x轴的交点)，

则当$BM\perp AC$时，$S_{\triangle ABC}$取得最大值. 此时，$B(3,2\sqrt{2})$，$(S_{\triangle ABC})_{\max}=2\sqrt{2}.$

评析 $\triangle ABC$ 的几何特征是 AC 边确定，故只须求出动点 B 到 AC 边的距离最值即可，而由 $|BC|=\sqrt{2}|BA|$ 可得动点 B 的轨迹是阿波罗尼斯圆，从而本题获解. 以阿波罗尼斯圆为背景的试题在高考中多次出现.

例 3 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $a=2, b+c=4$，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

解析 以直线 BC 为 x 轴，BC 的中点 O 为原点建立平面直角坐标系，由已知易得动点 A 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1(y\neq 0)$，当 A 在椭圆短轴顶点时，$\triangle ABC$ 面积取得最大，易求得 $(S_{\triangle ABC})_{\max}=\sqrt{3}$.

评析 由 $a=2$ 得 $\triangle ABC$ 的 BC 边确定，由动点 A 到定点 B、C 距离之和为定值得到动点 A 的轨迹为椭圆，从而问题得以解决.

例 4 在 $\triangle ABC$ 中，$B=30^\circ, BC=3, AB=2\sqrt{3}, D$ 是边 BC 上的点，B, C 关于直线 AD 的对称点分别为 B', C'，则 $\triangle BB'C'$ 面积的最大值为________.

解析 如图 1，延长 AD 交 BB' 于点 H，由对称性知，H 是 BB' 中点，且 $AH\perp BB'$，则 H 在以 AB 为直径的圆上，因为 $S_{\triangle BB'C'}=S_{\triangle BB'C}=2S_{\triangle BHC}$，易知当 H 位于劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 中点时，$S_{\triangle BHC}$ 最大，此时 H 到 BC 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$$S_{\triangle BB'C'}=2S_{\triangle BHC}=2\times\frac{1}{2}\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

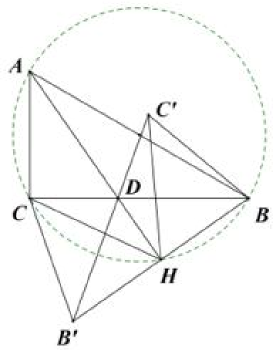

图1

评析 本题先延长 AD 交 BB' 于点 H，关键是通过 $S_{\triangle BB'C'}=S_{\triangle BB'C}=2S_{\triangle BHC}$ 转化要求的问题，进而把动的 $\triangle BB'C'$ 的问题转化为求动点 H 到 BC 的距离问题，又因为 H 在以 AB 为直径的圆上，通过直观想象知当 H 位于劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 中点时，$S_{\triangle BHC}$ 面积最大.

例 5 已知在$\triangle ABC$中，D在边AC上，$AC=3BD$，且$BC\perp BD$，求角A的最大值.

解析 由$BC\perp BD$可知B，C，D三点在以CD为直径的圆上，设该圆的圆心为O，显然当AB与该圆相切时，角A取得最大．如图 2，设圆O的半径为r，$BD=m$，由$\triangle ABO\sim\triangle CBD$得$\dfrac{AO}{CD}=\dfrac{BO}{BD}$，则$\dfrac{3m-r}{2r}=\dfrac{r}{m}$，解得$r=m$，则易求得$A=30^\circ$.

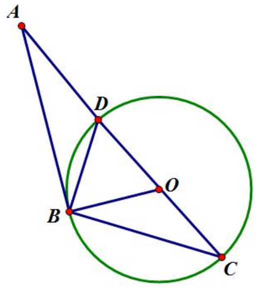

图2

评析 本题以$BC\perp BD$条件为突破口，得到动点B，C，D三点的相对运动轨迹，进而考虑点A取得最值的位置，从而求得角A的最大值.

在以上的题组中，解题策略是引导学生先从“动”的现象中发现“定”的本质，先求出动点的轨迹图形，再从“定”的本质中探索“动”的规律.

二、 移“动”为“定”

动态问题可以化归为静态问题来解决[2]，动点在移动的过程中，先注意观察动点的特殊位置或特殊情形，再结合动点的变化规律，得到所求取值范围的端点值. 动点在移动的过程中，因平移变换不改变图形的形状和大小，所以可以把一个复杂的图形，化归到简单的位置来处理. 利用特殊化思想对动点进行探路，可把动点移动到临界位置，使得问题简化，彰显数学的简洁美.

例 6 （2015 年高考新课标全国卷Ⅰ·理 16）在平面四边形$ABCD$中，$\angle A=\angle B=\angle C=75^\circ$，$BC=2$，则$AB$的取值范围是_______.

解析 如图 3 作$\triangle PBC$，使$\angle B=\angle C=75^\circ$，$BC=2$，作出直线$AD$分别交线段$PB$、$PC$于$A$、$D$两点（不与端点重合），且使$\angle BAD=75^\circ$，则四边形$ABCD$就是符合题意的四边形，过$C$作$AD$的平行线交$PB$于点$Q$，在$\triangle PBC$中，可求得$BP=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，

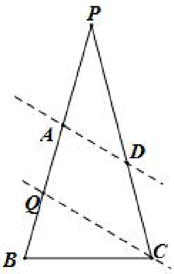

图3

在$\triangle QBC$中，可求得$BQ=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，所以AB的取值范围为$(\sqrt{6}-\sqrt{2},\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

评析 在平面四边形$ABCD$中，BC边先确定，先作出$\triangle PBC$及符合题意四边形$ABCD$，在这个四边形中，AD边动，在移动中，寻找极限的位置得到AB的取值范围.

例 7　如图 4，在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=45°$，$\angle B=120°$，$AB=\sqrt{2}$，$AD=2$，设 $CD=t$，则 t 的取值范围是______.

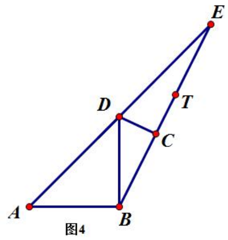

图4

解析　在 $\triangle ABD$ 中，易得 $BD=\sqrt{2}$，则 $\triangle ABD$ 为为等腰直角三角形，$\angle ABD=90^{\circ},\angle DBC=30^{\circ}$，所以点 C 在射线 BT 上运动（如图），

当 $DC\perp BT$ 时，CD 最短，为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

当 A,D,E 共线时，由正弦定理可得 $\dfrac{AE}{\sin 120^{0}}=\dfrac{AB}{\sin 15^{0}}$，解得 $AE=1+\sqrt{3}$，

则 t 的取值范围为 $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{3}+1\right)$.

评析　在平面四边形 $ABCD$ 中，$\triangle ABD$ 确定，由点 C 在射线 BT 上运动来确定取得最值的极限位置，从而求得 CD 的取值范围.

三、“动”中觅“定”

动态三角形中的最值问题，即动点在运动变化中存在最值，从函数的观点理解，这其中必然存在某个函数关系，解题关键是如何选择合适参数做为自变量，建立目标函数. 对于比较复杂的图形，要注意分析联系多个三角形的边、角关系进行转化，转化为两个变量之间的函数关系，进而求函数的最值，渗透了数学的抽象之美.

例 8（2018 年高考江苏卷·13）在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$\angle ABC=120°$，$\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D，且 $BD=1$，则 $4a+c$ 的最小值为_____.

解析　由面积相等得 $\frac{1}{2}ac\sin 120^{\circ}=\frac{1}{2}a\sin 60^{\circ}+\frac{1}{2}c\sin 60^{\circ}$，化简得 $a+c=ac$，则

$c=\dfrac{a}{a-1}(0<a<1),4a+c=4a+\dfrac{1}{a-1}+1=4(a-1)+\dfrac{1}{a-1}+5\ge 2\sqrt{4(a-1)\cdot\dfrac{1}{a-1}}+5=9$，

当且仅当 $a=\dfrac{3}{2},c=3$ 时等号成立.

评析　根据面积相等得到 a,c 之间的关系，从而对目标函数进行消元转化，化为只含有 a 的式子，再利用基本不等式求得最小值.

例 9 如图 5，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=2,BC=4,CD=5$．已知 $AD=3$，记四边形 $ABCD$ 的面积为 S，求 S 的最大值.

解析 在 $\triangle ABC$ 及 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理得，

$AC=\sqrt{AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos D}=\sqrt{AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos D}$，

整理得，$15\cos D-8\cos B=7$，………①

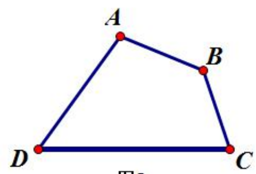

图5

又因为 $S=S_{\triangle ADB}+S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AD\bullet CD\sin D+\dfrac{1}{2}AB\bullet CB\sin \mathrm{B}$

$=\dfrac{1}{2}(15\sin D+8\sin B)$ 即 $2S=15\sin D+8\sin B$，………②

由①^2+②^{2}得，$4S^2+49=(15\sin D+8\sin B)^2+(15\cos D-8\cos B)^2$

$$=225+64-240(\cos B\cos D-\sin B\sin D)=289-240\cos(B+D).$$

即 $S^2=60-60\cos(B+D)$，当 $B+D=\pi$ 时，即 $\cos D=\dfrac{7}{23}$，$\cos B=-\dfrac{7}{23}$ 时，

$[\cos(B+D)]_{\min}=-1$，所以 $S^2\le 120$，解得 $S_{\max}=2\sqrt{30}$，

即所求的四边形 $ABCD$ 面积 S 的最大值为 $2\sqrt{30}$．

评析 先写出 S 的表达式，由于含有两个变量（角 B，角 D），故去寻找角 B 与角 D 的关系式，再根据三角函数求得最大值.

例 10 如图 6 所示，平面四边形 $ABCD$ 的对角线交点位于四边形的内部，$AB=1$，$BC=\sqrt{2}$，$AC=CD$，$AC\perp CD$，当 $\angle ABC$ 变化时，对角线 BD 的最大值为__________.

解析 设 $\angle ABC=\alpha,\angle ACB=\beta$，则由余弦定理可得

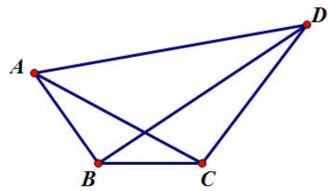

图6

$AC^2=3-2\sqrt{2}\cos\alpha$，

由正弦定理可得 $sin\beta=\dfrac{sin\alpha}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos\alpha}}$，在 $\triangle BCD$ 中，

$BD^2=2+3-2\sqrt{2}\cos\alpha-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos\alpha}\times\cos(90^\circ+\beta)$

$=5-2\sqrt{2}\cos\alpha+2\sqrt{2}\sin\alpha=5+4sin(\alpha-45^\circ)$，

故当 $\alpha=135^\circ$ 时，BD^2 有最大值 9，BD 取得最大值为 3，故答案为 3.

评析 首先考虑在 $\triangle BCD$ 中表示 BD，且要转化为 BD 与 $\angle ABC$ 间的关系，故先在 $\triangle ABC$ 中，找到 AC 及 $\angle ACB$ 与 $\angle ABC$ 的关系，从而得到 BD 与 $\angle ABC$ 的函数关系，利

用三角函数求解.这里，联系多个三角形进行边角转化渗透了函数与方程的思想.

四、写在最后

动态三角形问题直接求解往往比较困难，一般转化为定的轨迹或位置或函数.总之，就是化“动”为“定”，这其中蕴含了化归与转化的数学思想.

数学教学需要灵韵生动、意趣悠长[2].动态三角形问题的教学，教师应以“定”和“动”为主线，让学生多参与，在“变”和“不变”中积累数学活动经验，从而激发学生思维的灵动，从轨迹思想、极限思想、函数方程思想等方向思考解决问题的方法，在求解过程去探索动定结合，动中有定的数学美，让学生真正爱上数学.

参考文献：

[1]范世祥.微专题三 解三角形[J].中学数学教学参考:上旬，2018(1-2):89-92.

[2]沈顺良.例析 2016 年浙江数学高考试题解答中的化动为定[J].教育月刊·中学版，2017(2):82-84.

[2]成亮.“动中求定”感受数学之灵韵[J].上海教育科研，2013(1):79-80.