# 阿基米德三角形性质在高考数学中的应用

卢妮　　　蔡海涛

本文系福建省教育科学“十三五”规划课题《深度融合信息技术落实高中数学核心素养的实践研究》（课题编号：FJJKXB18-379）.

在近年高考解析几何直线与圆锥曲线位置关系的试题中，频频考查抛物线的切线问题.如2019年全国卷Ⅲ理科第21题、文科第21题,2018年全国卷Ⅲ理科第16题，2017年全国卷Ⅰ文科第20题，2014年辽宁卷理科第10题，2013年辽宁卷理科第20题，2013广东卷理科第20题，2012年全国卷Ⅰ理科第20题，2008山东卷理科第22题，2006年全国卷II理科第21题……这类试题对学生来说，是个不小的挑战，实测情况考生得分率很低. 这一现象引发笔者的思考，教师该如何提高学生解决这类问题的能力?本文从一道2019年高考题谈起，研究这类问题的破解之道.

**引例（2019年高考全国卷Ⅲ，理科21（1））**

已知曲线$C: y=\dfrac{x^2}{2}$，$D$为直线$y=-\dfrac{1}{2}$上的动点，过$D$作$C$的两条切线，切点分别为$A$，$B$.

证明：直线$AB$过定点.

**证明**:设$D(t,-\dfrac{1}{2})$，$A(x_1,y_1)$，则$y_1=\dfrac{1}{2}{x_1}^2$.又因为$y=\dfrac{1}{2}x^2$，所以$y'=x$.

则切线$DA$的斜率为$x_1$，故$y_1+\dfrac{1}{2}=x_1(x_1-t)$，整理得$2tx_1-2y_1+1=0$.

设$B(x_2,y_2)$，同理得$2tx_2-2y_2+1=0$. $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$都满足直线方程

$2tx-2y+1=0$.于是直线$2tx-2y+1=0$过点$A,B$，

所以直线$AB$方程为$2tx-2y+1=0$.即$2tx+(-2y+1)=0$，

当$2x=0,-2y+1=0$时等式恒成立.所以直线$AB$恒过定点$(0,\dfrac{1}{2})$.

**评析**:首先利用求导的方法求出在点$A$、$B$处的切线方程，然后通过类比得到直线$AB$的参数方程，最后证明直线过定点.本道试题的背景是抛物线的弦与过弦的端点的两条切线所围的三角形，这个三角形称为阿基米德三角形.

## 1 阿基米德三角形的常用性质

近十来高考试题,以阿基米德三角形为背景的抛物线切线问题研究的基本是焦点在$y$轴上的抛物线，下面以$x^2=2py(p>0)$型的抛物线为例介绍阿基米德三角形的常用性质.

如图1,抛物线为$x^2=2py(p>0)$，焦点为$F$，过点$F$的直线与抛物线相交于$A$、$B$两点，过$A$、$B$的切线相交于点$D$, $\triangle DAB$称作阿基米德三角形.该三角形具有以下常用

性质：

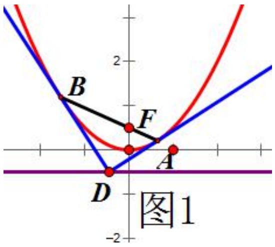

图1

**性质 1** ：$D$ 点必在抛物线的准线上；

**性质 2** ：$FD \perp AB$；

**性质 3** ：$DA \perp DB$；

**性质 4**：若 $AB$ 中点 $M$，则 $DM$ 平行(重合)于抛物线的对称轴；

**性质 5** ：一般地，过抛物线为 $x^2 = 2py(p>0)$ 准线上点作抛物线的两条切线，与抛物线相交于 $A$、$B$ 两点，直线 $AB$ 过抛物线焦点.

以上性质也适合其它型的抛物线，性质的证明过程从略.

不难发现，引例的命题实则是性质 1 的逆命题，也是性质 5 的直接应用.如果在解题过程中能有这种知识储备，问题将轻松获解.下例举阿基米德三角形的性质在高考题中的应用.

**2 阿基米德三角形性质的应用**

**例 1（2006 年高考全国卷 II•理科第 21（1）题）**已知抛物线 $C: x^2 = 4y$，焦点为 $F$，$A$、$B$ 是抛物线两动点，且 $\overrightarrow{AF} = \lambda\overrightarrow{FB}(\lambda > 0)$.过 $A$、$B$ 两点分别作抛物线的切线，设其交点为 $M$.证明 $\overrightarrow{FM} \bullet \overrightarrow{AB}$ 为定值.

**评析** 由且 $\overrightarrow{AF} = \lambda\overrightarrow{FB}(\lambda > 0)$ 知阿基米德三角形的底边经过抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点 $F$，由性质 2 得 $\overrightarrow{FM} \perp \overrightarrow{AB}$，故 $\overrightarrow{FM} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$.

**例 2（2014 年辽宁卷理科第 10 题）**已知 $A(-2,3)$ 在抛物线 $C$：$y^2 = 2px(p>0)$ 的准线上，过点 $A$ 的直线与 $C$ 在第一象限相切于点 $B$，记 $C$ 的焦点为 $F$，则直线 $BF$ 的斜率为

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{2}{3}$　　C.$\frac{3}{4}$　　D.$\frac{4}{3}$

**评析** 若本题设切线的方程为 $y = k(x+2)+3$，与抛物线 $C$：$y^2 = 2px$ 联立，令 $\Delta = 0$ 求得斜率，切点坐标，再得直线 $BF$ 的斜率， 如此解答计算量较大.若根据本题的背景为阿基米德三角形，由性质 2 得， $AF \perp BF$，由 $k_{AF} \cdot k_{BF} = -1$，则快速求出直线 $BF$ 的斜率为 $\frac{4}{3}$，选 D.

**例 3（2018 年高考全国卷Ⅲ•理科第 16 题）**已知点 $M(-1,1)$ 和抛物线 $C$：$y^2 = 4x$，过 $C$ 的焦点且斜率为 $k$ 的直线与 $C$ 交于 $A$，$B$ 两点．若 $\angle AMB = 90°$，则 $k =$________.

**评析** 本题注意到 $M(-1,1)$ 在抛物线 $C$：$y^2 = 4x$ 的准线上，且 $\angle AMB = 90°$，由性质 2、3 知 $MF \perp AB$，而 $k_{MF} = \frac{1-0}{-1-1} = -\frac{1}{2}$，$k_{MF} \bullet k_{AB} = -1$，则 $k = 2$.

**例 4**（2008 年山东省数学高考理科试题第 22 题(1)）如图 2，设抛物线 $C: x^2=2py(p>0)$，$M$ 为直线 $y=-2p$ 上任意一点，过 $M$ 引抛物线的两条切线，切点分别为 $A,B$. 求证：$A,M,B$ 三点的横坐标成等差数列.

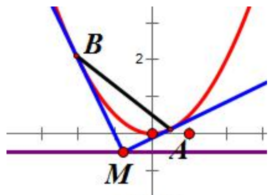

图2

**证明** 由题意设 $A\left(x_1,\dfrac{x_1^2}{2p}\right),B\left(x_2,\dfrac{x_2^2}{2p}\right),M\left(x_0,-2p\right)$，由 $x^2=2py$ 得 $y=\dfrac{x^2}{2p}$，故 $y'=\dfrac{x}{p}$. 所以 $k_{MA}=\dfrac{x_1}{p},k_{MB}=\dfrac{x_2}{p}$. 因此直线 $MA$ 的方程为 $y+2p=\dfrac{x_1}{p}\left(x-x_0\right)$，直线 $MB$ 的方程为 $y+2p=\dfrac{x_2}{p}\left(x-x_0\right)$. 因为 $A,B$ 分别在直线 $MA,MB$ 上，所以 $\dfrac{x_1^2}{2p}+2p=\dfrac{x_1}{p}(x_1-x_0)....(1)$，$\dfrac{x_2^2}{2p}+2p=\dfrac{x_2}{p}(x_2-x_0)....(2)$，由 (1) (2) 得 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$. 故 $A,M,B$ 三点的横坐标成等差数列.

**评析** 本题的背景即阿基米德三角形性质 4.

正因为阿基米德三角形这颗闪亮的明珠，数学发展的历史长河中不断的闪烁出真理的光辉. 这个两千多年的图形，如同一个题库，藏着各级各类数学考试素材[1]. 因此，教师若能在日常的数学教学中融入数学文化，不但可以激发学生学习数学的兴趣，还能丰富解题方法，进一步提高解题效率，达到事半功倍的效果.

**参考文献：**

【1】邵明志 陈克勤. 高考试题中的阿基米德三角形[J]. 数学通报，2008（9）：39-42.