一道省质检试题多解探究与拓展

陈凌燕[1]　蔡海涛[2]

1. 福建省仙游金石中学 351200　　2. 福建省莆田第二中学 351131

每年全国各地的高三质检卷，总有一些赏心悦目的试题，它们是命题老师智慧的结晶，对这些试题进行深入的探究，挖掘试题的背景及内涵，既能让教学内容更丰富多彩，又能激发学生的学习兴趣，有利于拓展学生的思维，提升学生的素养，对高三的复习备考有很大的意义. 下面笔者以 2020 年福建省高三毕业班质量检查测试文科第 20 题为例进行说明.

一、试题呈现

（2020 年福建省高三质检 •文 20） 已知抛物线 $C: y^2 = 2px\left(0 < p < 6\right)$ 的焦点为 F，A 为 C 上一动点，点 $Q\left(4,0\right)$，以线段 QA 为直径作 $\odot M$．当 $\odot M$ 过 F 时，$\triangle QAF$ 的面积为 3.

（1）求 C 的方程；

（2）是否存在垂直于 x 轴的直线 l，使得 l 被圆 M 所截得的弦长为定值？若存在，求 l 的方程；若不存在，说明理由.

二、试题特点

本题以抛物线为载体考查圆锥曲线的方程及其简单几何性质、圆的几何性质等知识，考查推理论证能力、运算求解能力，考查数形结合思想、函数与方程思想，考查直观想象、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性．题目的特点是：（1）本题以抛物线与圆的组合型的圆锥曲线为背景，需要观察两条曲线的特征，利用几何图形的性质解题，体现考查的综合性；（2）本题求解的问题为曲线的轨迹方程及定值问题，这两个问题均是解析几何中重要的问题，也是近年高考中的高频考点，体现模拟考试与高考接轨的功能；（3）本题第二问有多种解法，不同解法思路体现考生思维的差异性；（4）第二问是探索性问题，具有开放性和发散性，此类问题的条件和结论不完备，需要结合已知条件或假设新的条件进行探究、观察、分析、抽象、概括等，是素养导向下典型题型.

三、解法探析

本题（1）问易得 $C: y^2 = 4x$.（解答过程略）.

（2）问是个探索直线存在性问题，求解这类问题常有两个思路.

思路一：“肯定顺推法”，即将不确定性问题明朗化. 其步骤为：假设满足条件的元素（点、直线、曲线或参数）存在，用待定系数法设出，列出关于待定系数的方程组，若方程组有实数解，则元素存在；否则，元素不存在.

解法综述： 如图 1，假设直线 $l: x = a$ 存在，设点 $A\left(x_1, y_1\right)$，求得 AQ 中点 M 坐标 $\left(\dfrac{x_1+4}{2}, \dfrac{y_1}{2}\right)$，然后计算圆心 M 到 l 的距离 $d = \left|\dfrac{x_1+4}{2} - a\right|$，利用垂径定理，用 x_1, y_1, a 表示动圆 M 截 l 的弦长，$\left(\dfrac{t}{2}\right)^2 = r^2 - d^2 = \dfrac{\left(x_1-4\right)^2 + y_1^2}{4} - \left(\dfrac{x_1+4}{2} - a\right)^2$，再利用抛物线

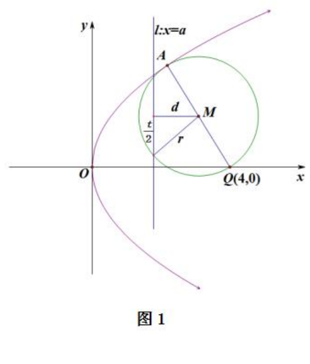


图 1

方程消去 y_1，得到弦长关于 a,x_1 的表达式，整理后得 $\frac{t^2}{4}=x_1(a-3)+4a-a^2$，故当 x_1 的系数为0时，即 $a=3$ 时，弦长为定值，从而求得 l 方程.

思路二：利用特殊与一般思想，先猜想后证明.

解法综述：假设满足题意的直线 $l:x=a$ 存在，在 A 的运动过程中取两个特殊位置，比如当 $A(0,0)$ 和 $A(4,4)$ 时，并求圆 M 的圆心坐标与半径，进一步利用垂径定理分别求出两个特殊圆截 l 的弦长，因为弦长为定值，建立方程求得 $a=3$，即表明"若 l 存在，则只可能为 $x=3$"，再证明圆 M 截 l 的弦长为定值，便可证明 l 为符合题意的直线，从而解决问题.

四、试题反思

1. 引申推广[1]

解完此题，笔者意犹未尽，对问题加以引伸推广，探究如下两个问题.

探究一：已知 A 是抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上一动点，点 $Q(q,0)$. 是否存在垂直于 x 轴的直线 l，使得 l 被以线段 QA 为直径的动圆 M 所截得的弦长为定值？若存在，求 l 的方程；若不存在，说明理由.

解：设 $l:x=a$，$A(x_1,y_1)$，则 $|QA|=\sqrt{(x_1-q)^2+y_1^2}$，$M\left(\frac{x_1+q}{2},\frac{y_1}{2}\right)$，

圆心 M 到直线 l 的距离 $d=\left|\frac{x_1+q}{2}-a\right|$，

设 l 被以线段 QA 为直径的动圆 M 所截得的弦长为 t，

则 $\left(\frac{t}{2}\right)^2=\left(\frac{|QA|}{2}\right)^2-d^2$，化简得 $t^2=(2p-4q+4a)x_1+4aq-4a^2$，

要使得弦长 t 为定值，则 $2p-4q+4a=0$，即 $a=q-\frac{p}{2}$，

此时 $t^2=2pq-p^2>0$，即 $q>\frac{p}{2}$，

所以当 $q>\frac{p}{2}$ 时，存在直线 $l:x=q-\frac{p}{2}$ 使得 l 被以线段 QA 为直径的动圆 M 所截得的弦长为定值，弦长为 $\sqrt{2pq-p^2}$.

当 $q\le\frac{p}{2}$ 时，不存在.

特别地，当 $q=\frac{p}{2}$ 即点 Q 即焦点时，此时该动圆与 y 轴相切.

探究二：已知 A 是抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上一动点，定直线 $l:x=a$，是否存在 x 轴上的定点点 Q，使得 l 被以线段 QA 为直径的动圆 M 所截得的弦长为定值？若存在，求定点 Q 的坐标；若不存在，说明理由.

解：设$Q(q,0)$，$A(x_1,y_1)$，则$|QA|=\sqrt{(x_1-q)^2+y_1^2}$，$M\left(\dfrac{x_1+q}{2},\dfrac{y_1}{2}\right)$，

圆心M到直线l的距离$d=\left|\dfrac{x_1+q}{2}-a\right|$，

设l被以线段QA为直径的动圆M所截得的弦长为t，

则$\left(\dfrac{t}{2}\right)^2=\left(\dfrac{|QA|}{2}\right)^2-d^2$，化简得$t^2=(2p-4q+4a)x_1+4aq-4a^2$，

要使得弦长t为定值，则$2p-4q+4a=0$，即$q=a+\dfrac{p}{2}$，

此时$t^2=2ap>0$即$a>0$，

所以，当$a>0$时，存在定点$Q\left(a+\dfrac{p}{2},0\right)$，弦长为$\sqrt{2ap}$.

当$a\le 0$时，不存在；

特别地，当$a=0$时，直线即y轴，取点Q为抛物线焦点，此时动圆与y轴相切.

2.类比探究[2]

基于以上的引申推广，类比椭圆与双曲线是否也具有类似的性质.

已知A是椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上一动点，点$Q(q,0)$. 是否存在垂直于$x$轴的直线$l$，使得$l$被以线段$QA$为直径的动圆$M$所截得的弦长为定值？若存在，求$l$的方程；若不存在，说明理由.

解：设$l:x=a$，$A(x_1,y_1)$，则$|QA|=\sqrt{(x_1-q)^2+y_1^2}$，$M\left(\dfrac{x_1+q}{2},\dfrac{y_1}{2}\right)$，

圆心M到直线l的距离$d=\left|\dfrac{x_1+q}{2}-a\right|$，

设l被以线段QA为直径的动圆M所截得的弦长为t，

则$\left(\dfrac{t}{2}\right)^2=\left(\dfrac{|QA|}{2}\right)^2-d^2$，化简得$t^2=-\dfrac{b^2}{a^2}x_1^2+(4a-4q)x_1+b^2+4aq-4a^2$，

因为$\dfrac{b^2}{a^2}\ne 0$，所以t是关于x_1的二次函数，不存在$a\in \mathrm{R}$使得t与x_1无关.

所以不存在直线满足题意.

双曲线与椭圆类似，不存在符合条件的直线，结论也不成立.

我们解题时常有“似曾相识燕归来”的感觉，这就是类比. 教师要引导学生由一个数学对象的性质迁移到另一个数学对象上去，从而获得另一个对象的性质，这是解决数学问题的常用方法，当然由此例还可看出类比仅仅是种猜测，结论未必正确，需要进行验证.

3. 变式拓展

(1) 已知 A 是抛物线 $C: y^2=4x$ 上一动点，点 $Q(2,0)$，垂直于 x 轴的直线 l 被以线段 QA 为直径的动圆 M 所截得的弦长为定值，则 Q 到直线 l 的距离为______.

解: 由上述结论，有且仅有直线 $l: x=2-\dfrac{p}{2}$ 符合题意，所以 Q 到直线 l 的距离为 $\dfrac{p}{2}=1$.

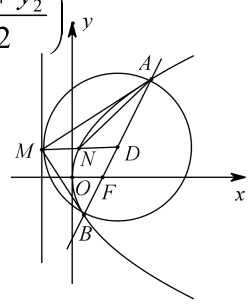
(2) 在平面直角坐标系 xOy 中，圆 $F:(x-1)^2+y^2=1$ 外的点 P 在 y 轴的右侧运动，且 P 到圆 F 上的点的最小距离等于它到 y 轴的距离. 记 P 的轨迹为 E.

（i）求 E 的方程；

（ii）过点 F 的直线交 E 于 A,B 两点，以 AB 为直径的圆 D 与平行于 y 轴的直线相切于点 M，线段 DM 交 E 于点 N，证明：$\triangle AMB$ 的面积是 $\triangle AMN$ 的面积的四倍.

解:（i）化简得 E 的方程为 $y^2=4x(x>0)$.（过程略）

（ii）设 $N(x_0,y_0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $D\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$.



依题意可设直线 AB 的方程 $y=k(x-1)\ (k\neq 0)$，

由 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ y^2=4x \end{cases}$ 得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$.

因为 $\Delta=(2k^2+4)^2-4k^4=16k^2+16>0$，所以 $x_1+x_2=\dfrac{2k^2+4}{k^2}$.

则有 $y_1+y_2=\dfrac{4}{k}$，故 $D(\dfrac{k^2+2}{k^2},\dfrac{2}{k})$.

由抛物线的定义知 $|AB|=x_1+x_2+2=\dfrac{4k^2+4}{k^2}$.

设 $M(x_M,y_M)$，依题意得 $y_M=\dfrac{2}{k}$，所以 $|MD|=\dfrac{k^2+2}{k^2}-x_M$.

又因为 $|MD|=\dfrac{|AB|}{2}$，所以 $\dfrac{k^2+2}{k^2}-x_M=\dfrac{2}{k^2}+2$，

解得 $x_M=-1$，所以 $M(-1,\frac{2}{k})$.

因为 $N(x_0,\frac{2}{k})$ 在抛物线上，所以 $x_0=\frac{1}{k^2}$，即 $N(\frac{1}{k^2},\frac{2}{k})$.

所以 $S_{\triangle AMB}=\frac{1}{2}|MD||y_1-y_2|=\frac{k^2+1}{k^2}|y_1-y_2|$，

$$S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}|MN||y_1-y_D|=\frac{1}{2}|MN|\times\frac{1}{2}|y_1-y_2|=\frac{k^2+1}{4k^2}|y_1-y_2|.$$

故 $S_{\triangle AMB}=4S_{\triangle AMN}$.

罗增儒教授说过:数学解题的四个水平为:模仿、练习、领悟、理解[3].教师设计变式练习，是提升学生解题能力的有效途径.

五、结语

高考及各地市质检试题凝聚命题专家们的集体智慧，具有很强的导向性，研究这些试题，以背景、内涵为抓手，追寻专家们命制试题的心路历程、感悟试题的多方视角、领会数学问题的联系，这应是试题研究的“本”，解题教学的“道”.

参考文献:

[1]彭志强 蔡海涛.润物细无声，花开知多少[J].福建中学数学,2014(5):12-14.

[2]陈天雄.一道高考解析几何试题的引伸及推广[J].数学通报,2002(6):25-26.

[3]罗增儒.数学解题的水平划分[J].中学数学教学参考(上旬),2020(3):2-4.