解复杂图形中的三角形问题

莆田第二中学　　　蔡海涛

在“解三角形”问题中，有些图形比较复杂，包含多个三角形，学生无法厘清边角关系，合理选择由哪个三角形入手、使用哪个定理，从而不能顺利作答. 解决这类问题，先分析图形特征，将已知条件抽象概括后，一般有两种类型：一类是把已知量集中一个三角形中，这个三角形可解；还有一类是无法把已知量集中在一个三角形中，已知量和未知量涉及两个或两个以上三角形. 本文分析这两类问题，探究其求解策略，期对学生有所帮助.

1 集中已知量在一个三角形中求解

例 1 （2019 年高考浙江卷 • 14）在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90°$，$AB=4$，$BC=3$，点D在线段AC上，若$\angle BDC=45°$，则$BD=$____，$\cos\angle ABD=$________.

分析 分析图形特征，先解$\mathrm{RT}\triangle ABC$，求得$\sin C=\dfrac{4}{5}$，然后把已知量和未知量集中在$\triangle BCD$中，利用正弦定理求得BD，进而利用$\angle CBD=135°-\angle C$及$\angle ABD=90°-\angle CBD$，求得$\cos\angle ABD$.

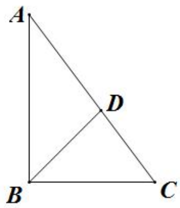

图1

解 如图 1，在$\mathrm{RT}\triangle ABC$中，$AB=4$，$BC=3$，易得$\sin C=\dfrac{4}{5}$，

在ΔBCD中，可得$\dfrac{BD}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin\angle BDC}=\dfrac{3}{\sin\angle BDC}$，可得$BD=\dfrac{12\sqrt{2}}{5}$；

因为$\angle CBD=135°-C$，所以$\sin\angle CBD=\sin(135°-C)=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$，

则$\cos\angle ABD=\cos(90°-\angle CBD)=\sin\angle CBD=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.

例 2 如图 2，在梯形$ABCD$中，已知$\angle A=\dfrac{\pi}{2},\angle B=\dfrac{2\pi}{3},AB=6$，点$E$在$AB$边上，且$BE=1$，连接$CE,DE$，已知$\angle CED=\dfrac{2\pi}{3},CE=\sqrt{7}$.

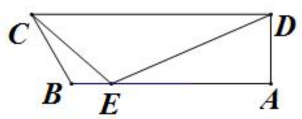

图2

（1）求$\sin\angle BCE$的值；（2）求CD的长.

分析 第（1）问比较简单，在$\triangle CBE$中，由正弦定理易求得$\sin\angle BCE$的值；第（2）问中，分析图形特征，在$\triangle CED$中，由余弦定理，只须求得DE便可求得CD，故考虑先解$\mathrm{RT}\triangle ADE$，由（1）可得$\sin\angle BEC$，进而求得$\sin\angle AED$，又$AE=5$，故可解$\mathrm{RT}\triangle ADE$求得DE的值，最后在$\triangle CED$中求得CD的值.

解 （1）在$\triangle CBE$中，由正弦定理得

$$\frac{CE}{\sin B}=\frac{BE}{\sin\angle BCE}，即\frac{\sqrt{7}}{\sin\dfrac{2\pi}{3}}=\frac{1}{\sin\angle BCE}，可得\sin\angle BCE=\frac{\sqrt{21}}{14}.$$

（2）在$\triangle CBE$中，由余弦定理得$CE^2=BE^2+CB^2-2BE\cdot CB\cos\dfrac{2\pi}{3}$，解得$CB=2$.

又根据余弦定理易得$\cos\angle BEC=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，则$\sin\angle BEC=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

$\sin\angle AED=\sin(\pi-\angle CED-\angle BEC)=\sin(\frac{\pi}{3}-\angle BEC)=\frac{\sqrt{21}}{14},\cos\angle AED=\frac{5\sqrt{7}}{14}$,

在 RT$\triangle ADE$ 中，$DE=\frac{AE}{\cos\angle AED}=2\sqrt{7}$. 在$\triangle CED$ 中，由余弦定理易得 $CD=7$.

例 3 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c，已知 $c=2\sqrt{5}$，且 $2a\sin C\cos B=a\sin A-b\sin B+\frac{\sqrt{5}}{2}b\sin C$，点 O 满足 $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\mathbf{0}$，$\cos\angle CAO=\frac{3}{8}$，则$\triangle ABC$ 的面积为___________.

分析 由已知得 O 为$\triangle ABC$ 的重心，利用中线的特征，延长 BC 边上的中线 AD 到 E，使得 $AD=DE$，从而把已知条件集中在 $\triangle ABE$ 中，从这个三角形突破，同时利用 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABE}$，本题可轻松获解.

解 由已知得 $2ac\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=a^2-b^2+\frac{\sqrt{5}}{2}bc$，结合 $c=2\sqrt{5}$ 得 $b=4$.

由 $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\mathbf{0}$ 得 O 为$\triangle ABC$ 的重心，连接 AO 交 BC 于 D，则 D 为 BC 边中点，延长 AD 到 E，使得 $AD=DE$，连接 BE，如图 3 所示.

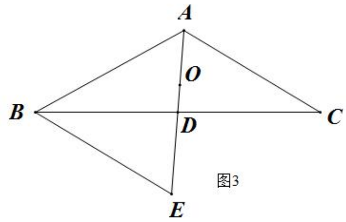

图3

易得$\triangle ACD\cong\triangle EBD$，故在$\triangle ABE$ 中，$BE=AC=4$，

$\angle BEA=\angle CAO$，所以 $\cos\angle BEA=\cos\angle CAO=\frac{3}{8}$，

由余弦定理得 $AE=4$，

又 $\sin\angle BEA=\sin\angle CAO=\sqrt{1-\cos^2\angle CAO}=\frac{\sqrt{55}}{8}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}AE\bullet BE\bullet\sin\angle BEA=\frac{1}{2}\times4\times4\times\frac{\sqrt{55}}{8}=\sqrt{55}$.

2 寻找几个三角形间的关系求解

例 4 在$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 上的点，AD 平分 $\angle BAC$，$\triangle ABD$ 的面积是$\triangle ADC$ 面积的 2 倍.

（1）求 $\frac{\sin B}{\sin C}$；（2）若 $AD=1, DC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求 BD 和 AC 的长.

分析 (1)问根据正弦定理及三角形面积公式易得；本题第(2)问中，在$\triangle ADC$ 及$\triangle ABC$ 中均无法直接求得 AC，故去探究$\triangle ABD$ 和$\triangle ADC$ 的关系，易知 $\angle ADB+\angle ADC=\pi$，结合 $AB=2AC$，利用余弦定理求得 AC 的长.

解 （1）$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{AC}{AB}=\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{1}{2}$.

（2）因为 $\frac{BD}{DC}=\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=2$，所以 $BD=\sqrt{2}$. 在$\triangle ABD$ 和$\triangle ADC$ 中，由余弦定理知，

$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos\angle ADB$, ①

$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC\cos\angle ADC$, ② 因为 $\cos\angle ADB = -\cos\angle ADC$，

所以①+2×②得 $AB^2 + 2AC^2 = 6$，又 $AB = 2AC$，所以 $AC = 1$.

例 5 如图 4，在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC = \dfrac{3\pi}{4}$，$AB \perp AD$，$AB = 1$．若 $\angle ADC = \dfrac{\pi}{6}, CD = 4$, 求 $\sin\angle CAD$.

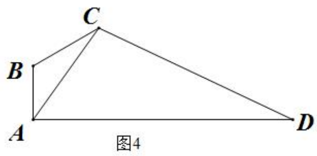

图4

分析 本题△ABC 及△ACD 中均无法直接求解，故从△ABC 和△ACD 中寻找边角关系，即 $\angle BAC = \dfrac{\pi}{2} - \angle CAD$，进而分别在两个三角形中根据正弦定理，得到以 $\sin\angle CAD$ 为变量的方程，求得 $\sin\angle CAD$ 的值.

解 设 $\angle CAD = \theta$，在△ACD 中，由正弦定理得，$\dfrac{AC}{\sin\angle ADC} = \dfrac{CD}{\sin\angle CAD}$，

即 $\dfrac{AC}{\sin\dfrac{\pi}{6}} = \dfrac{4}{\sin\theta}$，①在△$ABC$ 中，$\angle BAC = \dfrac{\pi}{2} - \theta, \angle BCA = \theta - \dfrac{\pi}{4}$,

由正弦定理得 $\dfrac{AC}{\sin\angle ABC} = \dfrac{AB}{\sin\angle BCA}$, 即 $\dfrac{AC}{\sin\dfrac{3\pi}{4}} = \dfrac{1}{\sin(\theta - \dfrac{\pi}{4})}$，②

①②两式相除整理得 $\sin\theta = 2\cos\theta$，故 $\sin\angle CAD = \sin\theta = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

综上可知，解复杂图形中的三角形问题，一般策略是先分析图形特征，考虑选择从哪个三角形研究，使用哪个定理，综合分析已知和求解问题的关系，一般有两个方向：（1）把已知量全部集中在一个三角形中，利用正弦定理、余弦定理求解；（2）已知量与未知量涉及两个或两个以上三角形，先考虑解条件充分的三角形，再逐步解其他三角形，有时需要设出未知量，从几个三角形中列出方程（组），解方程（组）进行求解.