一道质检题的多解与探究

莆田第二中学　蔡海涛

本文系2019年度福建省基础教育课程教学研究课题《核心素养导向下高中数学阅读教学模式的研究》（课题编号:MJYKT2019-106)的研究成果.

摘要：本文以一道高三质检题为例，探究以$\ln x$与e^x组合型函数为载体的恒成立问题的求解策略.

关键词:函数导数 多解探究

一、试题呈现

已知函数$f\left(x\right)=\ln x-x$，$g\left(x\right)=x\mathrm{e}^x-2x-1$.

证明:当$x\in\left(0,+\infty\right)$时，$g\left(x\right)\geqslant f\left(x\right)$.

二、解法探究

解法一:令$F\left(x\right)=g\left(x\right)-f\left(x\right)=x\cdot\mathrm{e}^x-\ln x-x-1$，

则$F'\left(x\right)=\left(x+1\right)\cdot\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{x+1}{x}\cdot\left(x\cdot\mathrm{e}^x-1\right)$. 令$G\left(x\right)=x\cdot\mathrm{e}^x-1\left(x>0\right)$，

则$G'\left(x\right)=\left(x+1\right)\cdot\mathrm{e}^x>0$，所以$G\left(x\right)$区间$\left(0,+\infty\right)$单调递增.

又$G\left(0\right)<0$，$G\left(1\right)>0$，所以$G\left(x\right)$存在唯一零点x_0，且$x_0\in\left(0,1\right)$.

当$x\in\left(0,x_0\right)$时，$G\left(x\right)<0$，则$F'\left(x\right)<0$，$F\left(x\right)$单调递减;

当$x\in\left(x_0,+\infty\right)$时，$G\left(x\right)>0$，则$F'\left(x\right)>0$，$F\left(x\right)$单调递增，

所以$F\left(x\right)_{\min}=F\left(x_0\right)=x_0\cdot e^x-\ln x_0-x_0-1$.

又$G\left(x_0\right)=0$，所以$x_0\cdot e^{x_0}-1=0$，$\ln x_0+x_0=0$，所以$F\left(x\right)_{\min}=F\left(x_0\right)=0$.

故$g\left(x\right)\geqslant f\left(x\right)$.

评注：要证$g\left(x\right)\geqslant f\left(x\right)$，即证$F\left(x\right)=g\left(x\right)-f\left(x\right)\geqslant 0$，只须证$F\left(x\right)_{\min}\geqslant 0$，故对$F\left(x\right)$求导，研究其单调性. 令$F'\left(x\right)=0$，得$x\cdot\mathrm{e}^x-1=0$，这是个超越方程，无法直接求出该方程的解，通过零点存在性定理证明零点是存在的，再利用隐零点问题处理方法进行求解[1]，从而破解本题难点. 一般地，证明不等式成立，常构造函数转化为最值大于(小于)等于0.

解法二:要证$g\left(x\right)\geqslant f\left(x\right)$，只须证$x\cdot\mathrm{e}^x\geqslant\ln x+x+1$.

易证$\mathrm{e}^x\geqslant 1+x$，所以$x\cdot\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{\ln x}\cdot\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{\ln x+x}\geqslant\ln x+x+1$，得证.

评注：证明含有$\ln x$与e^x的不等关系，常利用不等式“$\mathrm{e}^x\geqslant 1+x$”及“$\ln\left(1+x\right)\leqslant x$”进行放缩，实现“超越式”到“非超越式”的转化.

三、高考链接

（2014 年高考全国卷Ⅰ•理科 21）设函数 $f\left(x\right)=a\mathrm{e}^{x}\ln x+\dfrac{b\mathrm{e}^{x-1}}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点（1，$f(1)$）处的切线方程为 $y=\mathrm{e}(x-1)+2$.

（1）求 a,b；（2）证明：$f(x)>1$.

四、变式拓展

变式 1 求证: $\ln x<\dfrac{2\mathrm{e}^{x-2}}{x}$.

证明:要证原不等式成立，只须证 $\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{2\mathrm{e}^{x-2}}{x^{2}}$.

令 $f\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x}$，易得 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,\mathrm{e}\right)$ 单调递增，在区间 $\left(\mathrm{e},+\infty\right)$ 单调递减，

所以 $f\left(x\right)\leqslant f\left(\mathrm{e}\right)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

令 $g\left(x\right)=\dfrac{2\mathrm{e}^{x-2}}{x^{2}}$，则 $g'\left(x\right)=\dfrac{2\mathrm{e}^{x-2}\left(x-2\right)}{x^{3}}$，

则 $g\left(x\right)$ 区间 $\left(0,2\right)$ 单调递减，在区间 $\left(2,+\infty\right)$ 单调递增，

所以 $g\left(x\right)\geqslant g\left(2\right)=\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{\mathrm{e}}\geqslant f\left(x\right)$，即 $\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{2\mathrm{e}^{x-2}}{x^{2}}$，得证.

评注:若将要证不等式转化为 $\ln x-\dfrac{2\mathrm{e}^{x-2}}{x}<0$，构造函数证明会比较复杂,所以把 $\ln x$ 与 e^{x} 分离在不等式两边进行处理. 对于形式比较复杂的函数，往往需要合理拆分与变形，一般转化为只含有一个“超越式”的函数进行处理.

变式 2:已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{2\ln x+2}{e^{x}}$.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间;

（2）证明：当 $x>0$ 时，都有 $f'\left(x\right)\ln\left(x+1\right)<\dfrac{2}{e^{x}}+\dfrac{2}{e^{x+2}}$.

解:（1）函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单调递增，在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递减;（过程略）

（2）要证明 $f'\left(x\right)\ln\left(x+1\right)<\dfrac{2}{e^{x}}+\dfrac{2}{e^{x+2}}$，即证 $\left(1-x-x\ln x\right)\ln\left(x+1\right)<\left(1+\dfrac{1}{e^{2}}\right)x$，

令 $g\left(x\right)=1-x-x\ln x$，则 $g'\left(x\right)=-1-\left(\ln x+1\right)=-2-\ln x$，

当$0<x<\frac{1}{e^2}$时，$g'(x)>0$，当$x>\frac{1}{e^2}$时，$g'(x)<0$，

所以函数$g(x)$在$\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{e^2},+\infty\right)$上单调递减，$g(x)\leqslant 1-\frac{1}{e^2}+\frac{2}{e^2}=1+\frac{1}{e^2}$，

所以$1-x-x\ln x\leqslant 1+\frac{1}{e^2}$. 又易证$\ln(x+1)<x$，当且仅当$x=1$时取等号，

所以$0<\ln(x+1)<x$，则$(1-x-x\ln x)\ln(x+1)<\left(1+\frac{1}{e^2}\right)x$，

综上，当$x>0$时，都有$f'(x)\ln(x+1)<\frac{2}{e^x}+\frac{2}{e^{x+2}}$.

评注:对于含有$\ln x$与e^x型的超越函数，具体解决时须根据两类函数的特点，挖掘结构特征，灵活变形，脑中有“形”，注意重要不等式$\ln x\leqslant x-1\Leftrightarrow e^x\geqslant x+1$的合理代换.

五、总结提升

指数对数组合型的函数不等式问题，常用的解题方法有三种：一是指数对数分离并向易于求最值的常用函数转化；二是利用放缩消掉指数函数或对数函数之一，再进行处理；三是隐零点法. 对于具体问题，可根据函数特征具体分析，选择合适方法求解.

参考文献:

［1］蔡海涛. 零点欲求疑无路　设而不求又一村［J］. 福建中学数学，2020(1):41-43.