创设数学问题情境、促进学生深度学习

---以《计数原理的综合应用》为例

福建省莆田市教师进修学院　戴建仁　　　　福建省莆田第二中学　李志洪

内容摘要：落实数学核心素养的课堂教学呼唤深度学习，而深度学习需要高阶思维的全面深度参与，需要恰当问题情境的激发引燃，因此问题教学的核心就是要引发并维持学生的深度学习，但在教学中存在因问题设计失效、情境创设失真而产生浅表、虚假、低效的教学.本文以《计数原理的综合应用》的教学问题设计为例，从横向导问发散策略、纵向追问探究策略和多点联问概括策略三个方面探讨如何有效创设问题情境、激发高阶思维活动，引发并维持学生的深度学习，提高高中数学课堂教学质量和水平.

关键词：高中 数学 问题 情境 创设 深度学习

正文

一、问题提出

“问题是数学教学的心脏”，是激发思维的“原点”和“火花塞”，是深度学习的本源和“催化剂”.思维是问题设计和初心和使命，是深度学习的内在核心要素.深度学习是问题设计的结果性目标，是高阶思维的外显表现.但当前问题教学中普遍存在浅表、虚假、低效的学习现象和行为，主要原因是源头——问题设计失效、情境创设失真，导致难以激发并维持学生有效的思维活动，影响了学习的质量和效果，具体表现在：1.问题设计缺乏系统性、层次性和关联（逻辑）性，难以维持学生思维热度，思维效能感低；2.问题设计缺乏时代性、情境性和挑战性，难以激发学生思维主观能动性（或内在动力），思维层阶性低；3.问题设计缺针对性、目的性和实效性，学生难以明确思维目标方向，思维效率低；4.问题教学思维激发引导关注不够，思维结果含金量低；5.问题教学留给学生思考的时间和空间不足，导致学生的探究浅尝即止、浮于表面.因此问题教学的核心就是要引发并维持学生的深度学习，所以如何有效创设问题情境，指向深度学习，成为落实核心素养导向教学改革亟待研究解决的问题.

二、指向深度学习的问题情境创设策略

“深度学习是高效教学的关键”.深度学习是在教师引领下，学生围绕着具有挑战性的学习主题，全身心积极参与，在理解学习的基础上，能够批判性地学习新的思想和事实，并顺应内化重组优化原有的认知结构，能够将已有的知识迁移到新的情境中，做出决策和解决问题的学习.深度学习强调在高阶思维参与下的理解、反思、建构以及迁移运用和问题解决.通常具有分析、综合、反思、评价、应用、决策等行为表现，善于在问题解学中发现差异、把握共性，实现方法迁移，以少驭多，以简驭繁，呈现批判性、创造性的思维特征.本文以《计数原理的综合应用》的教学问题设计为例，从横向导问发散策略、纵向追问探究策略和多点联问概括策略三个方面探讨如何有效创设问题情境、引发并维持学生的深度学习，提高高中数学课堂教学质量和水平.

1. 横向导问发散策略

横向导问发散是指教师根据教学内容、目标及学生实际，选定若干个典型问题作为新问题的“生长点”，启发学生发散思维，起到以点带面，突出重点的作用.

案例（1）

师：问题1（提问），请自主回顾并阐述分类与分步计数原理的区别与联系.生1：（答）略.

师：问题2（导问），同学们你能否用四种不同颜色给如图所示的中国地图着色，使得有共同边界的相邻区域着上不同色吗？共有多少种不同的着色方案？

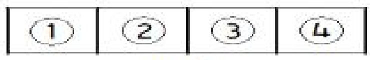
生2：（答）感觉区域太多，不知从哪里入手？

师：（引导说明）这个问题的背景是《四色猜想》.1852年，弗

南西斯·格思里在给地图着色时，发现了一种有趣的现象:“看来，每幅地图都可以用四种颜色着色，使得有共同边界的国家着上不同的颜色.”这个猜想却一直不能从数学上加以严格证明！一直到1976年，美国数学家阿佩尔与哈肯在两台不同的电子计算机上，用了1200个小时，作了100亿判断，才终于完成了四色定理的机器证明.至今仍有不少数学家还在寻找一种简捷明快的书面证明方法.

师：问题3（导问)，中国地图的区域太多，对其涂色无从下手，那么我们能否将该问题适当抽象并简单化为数学问题？比如减少区域并用数字1，2，3，4等标号区别，颜色指定红、黄、蓝、绿四种等，你得到的数学问题是什么？

生3:（答）如图1，用红、黄、蓝、绿四种不同颜色给图中的标号1，2，3，4的四个空格涂色，要求每个空格涂一种颜色，若颜色不能重复选取，问共有多少种不同的涂法？



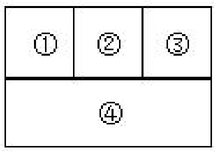
(图1)

生4:（答）我给出的区域示意图如图2所示，其他与学生3相同，则共有多少种不同的涂法？

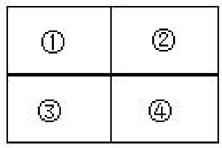
生5:（答）我给出的区域示意图如图3所示，其他与学生3相同，则共有多少种不同的涂法？

生6:（答）我给出的区域示意图如图4所示，其他与学生3相同，则共有多少种不同的涂法？

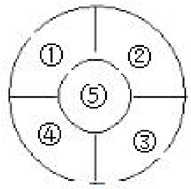
设计意图:通过中国地图和数学史故事的情境设计,渗透数学史、数学文化和家国情怀,营造一个有文化的数学课堂,让学生独立自主经历实际问题的数学化建模过程,提升数学建模与数学抽象的核心素养.



(图2)



(图3)



(图4)

2. 纵向追问探究策略

纵向追问探究是指教师选取某个重要的、典型的、易错易混的问题，对其命题条件进行适当的变式形成新的问题，在对比、比较、探究中以期达到对问题本质的深刻理解与把握.

案例（2）

师：问题4（追问)，不同的思考得出不同的结果.那学生3提出来的数学问题，该如何解决呢？

生7:（答）我可以用乘法计数原理，①有4种选择方法，②有3种选择方法，③有2种，④有1种，四个格子都涂完共有种.

生8:（答）我可以在4个格子中选1个涂红色，共有4种选法，剩下的3个格子选择1个涂黄色，可以从剩下的2个格子选1个涂蓝色，剩下的绿色只能涂在最后一格中，共有4×3×2×1=24种.

师:（引导）同学们，上面两种方法中，一种是格子选颜色，另一种是颜色选格子，本质相同，均使用乘法计数原理.

师：问题5（追问)，现在若把学生3提出的问题中的“颜色不能重复”换成“颜色可以重复选取”，那么结果是否发生变化呢？

生9:（答）完成此事共分4步，格①可以从4种颜色选择，第②格也有4种选择方法，依此类推，由分步计数原理共有4^4种不同的方法.

师：问题6（追问)，若将上述问题变式为:（1）用3种不同颜色（能重复选取）给5个横排的空格涂色，要求每个空格涂一种颜色，问共有多少种不同的涂法？（2）用5种不同颜色（能重复选取）给3个空格涂色，要求每个空格涂一种颜色，问共有多少种不同的涂法？

生10:（答）问6（1）与问6（2）均属于重排问题求幂法，问6（1）涂色法有3^5种，问6（2）涂色法有5^3种.

师：问题7（追问)，若把学生3提出的问题中的“颜色不能重复选取”改为“颜色不能重复选取且空格1不能涂红色”，问共有多少种不同的涂法？

生11:（答）可以利用定位问题优先法（特殊元素和特殊位置优先法)，可得3×3×2×1=18.

生12:（答）我可以采用正难则反总体淘汰法，可得4×3×2×1−3×2×1=18种.

师：问题 8（追问），若把问题 7 的条件改为“颜色可重复选取但格①不能涂红色”呢？

生 13：（答）我可以采用正难则反总体淘汰法，可得 4^4-3^3 种.

师：问题 9（追问），那么学生 4、5、6 所提出的问题该如何解决呢？若类比学生 3 提出问题的变式方法进行变式，你也能正确解答吗？（由于时间关系，我们共同解决学生 6 所提出的数学问题，其它问题留作课后思考题，请自主独立完成）.

生 14：（答）通过观察分析，发现与问题 8 与 9 同，格⑤有 4 种涂色方法，剩 3 色涂环形圆，则有 4×（3×2+2×3×2×1）=72 种；我也可以用颜色分类与学生 6 所提出的问题类同.

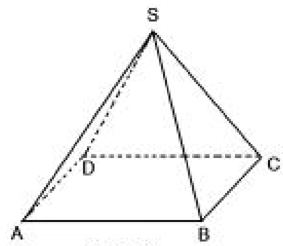
设计意图：在引导学生解决学生 3 所提出的问题的基础上，结合教材例习题，逐步改变命题条件，引导学生深度探究问题的本质，采用对比、比较的方法，突破“重复选取”与“不重复选取”、“特殊位置”与“特殊元素”等易错易混点.

3. 多点联问概括策略

多点联问概括是指将几个相关性问题整合分析其联系与区别或进行一般化、特殊化、具体化处理，从而产生更高层次的抽象概括，有利于学生知识和方法的迁移应用.

案例（3）

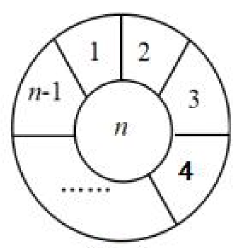
师：问题 10（联问），如图 5，用红、黄、蓝、绿四种不同颜色给给四棱锥 S-ABCD 的 5 个顶点涂上不同的颜色，使得各线段两个端点的颜色不相同，问共有多少种不同的涂法？你还有什么其他的不同想法？



（图5）

生 15：（答）通过观察分析发现该问题与学生 6 所提出的问题本质上是相同的，所以答案也是 72 种.

师：问题 11（联问），如果把上述问题一般化，如图 6，若将一个圆形分成 $n(n\in N^*,n\geq 3)$ 个区域，用 $m(m\in N^*,m\geq 3)$ 种颜色给这 n 个区域涂色，要求相邻区域不使用同一种颜色，但同一种颜色可重复使用，则不同的涂色方案有多少种？



（图6）

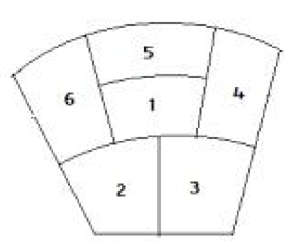
学生 16：（答）我用前面的计数原理解决有困难，但我通过观察探究：我可以应用递推数列的的知识解决，设 a_n 表示 n 个区域涂色的方案数，则 1 有 m 种涂法，2 有 m-1 种涂法，…，n-1, n 区各有 m-1 种涂法，依乘法原理共有 $m(m-1)^{n-1}$ 种涂法，介是这些涂法中包含了 n 区可能和 1 区涂上相同的颜色，而 n 区与 1 区相同时，就是相当于 n-1 个区域涂色，m 种颜色合乎条件的方法.

所以 $a_n=m(m-1)^{n-1}-a_{n-1}$，且 $a_3=m(m-1)(m-2)$

所以 $a_n-(m-1)^n=-[a_{n-1}-(m-1)^{n-1}]$，

$a_n-(m-1)^n=[a_3-(m-1)^3](-1)^{n-3}$

所以 $a_n=(m-1)^n+(m-1)(-1)^n(n\geq 3)$，

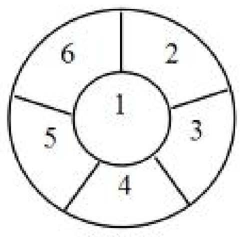


（图7）

师：问题 12（联问），（2003 年高考江苏题）某城市中心广场建一个花圃，花圃分为 6 个部分如图 7 所示，现要栽种 4 种不同颜色的花且相邻部分不能同色，不同的栽种方法有几种？

生 17：（答）此时可将图形变为圆环形（如图 8 所示），1 区有 4 种不同涂法，N=4*a_5=120.

设计意图：以课本例题作为知识生长点，追本溯源，由浅入深，通过由具体的实例推广到一般性结论，在得到数学结论的基础上形成新的命题，引领学生从

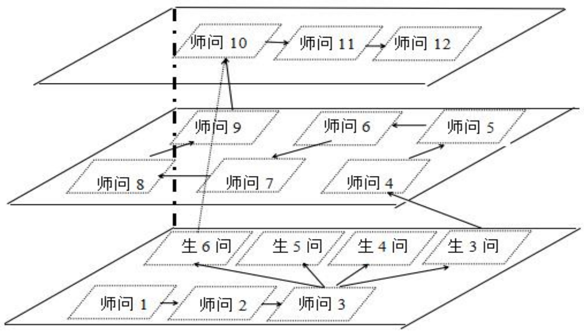


（图8）

感性认识上升到理性认识，促使学生的思维更具深刻性、系统性，引导学生在探索的过程中发现更深层次的知识，力争达到更高的目标高度。由于问题比较抽象，让学生大胆观察、猜想、思考、证明、概括，完善自己的方法，而且通过讨论发挥学生的主观能动性，争相展示自己的见解，使课堂达到高潮.

三、指向深度学习问题情境设计的反思

从问题设计层面反思：由上面问题设计层次流向示意图，可以直观看出，学生 3、4、5、6 提出的问题是在师问 3 的引导下发散思维的结果.师问 4、5、6、7、8、9 是在学生 3 提出的问题的基础上进行变式探究，有效突破易混易错点，深化本质探究与理解.师问 10 是在学生 6 提出的问题与师问 9 的基础上进行模型识别，师问 11 是对师问 10 进行一般化，而师问 12 是师问 11 的特殊化，结构严谨、层次分明，脉络清晰，能有效突出重点并突破难点.



从思维激活层面反思：师问 3 具有开放性、启发引导性，能有效引发学生的发散思维，而学生在对生活情境问题进行数学化的建模过程中，需要认真进行观察，适当的抽象和数学语言描述，训练并发展了学生思维的发散性和创造性.师问 4、5、6、7、8、9，逐步变式，层层递进，不断进行观察、比较、对比，找差异、抓共性，呈现高阶思维的特征，能有效培养学生思维的深刻性和批判性，师问 9 更是引导学生进行类比探究，实现研究方法和思维结果的迁移应用.师问 10 与学生 6 提出的问题的本质是一致的，师问 11 是对师问 10 进行一般化，而师问 12 是师问 11 的特殊化，是培养学生思维灵活性的良好载体，在模型识别与问题解决中突显高阶思维的训练与培养.

从目标达成层面反思：本节课的教学目标中的知识与技能目标是能说出分类与分步计数原理的内容、联系区别，能迁移应用并解决有关的数学问题；过程与方法目标是采用问题串结合变式教学，利用观察、抽象、概括、比较、对比、分类、化归、转化、简化、特殊化、一般化等思维方法引导学生独立思考，能归纳出所涉及的化归与转化思想、特殊与一般思想和分类与整合思想；培养学生抽象与概括能力、推理能力与计算能力；情感态度价值观目标是树立学好数学的信心和兴趣，形成理性思维和科学求真的思维品质.目标设计可观可测可评并在教学过程中关注目标达成的评估与调控，充分发挥目标导控作用，较好实现教学评的一体化.

从教学效果层面反思：本节课具有探究性和研究性，通过合理创设问题情境，根据最近发展区原则引导学生独立积极思考，通过师生间交流，学生间相互合作，自主探究计数原理的应用，在探究过程中深化知识理解，在解决问题中体会知识方法迁移应用的成功体验，课堂气氛融洽活跃，不断产生思维碰撞并涌现思维闪光点，课堂推进有序有度有法有爱，有效引发并维持学生的深度学习，取得良好的教学效果，发展了学生的数学核心素养.

结束语

“教学有法、但无定法、贵在得法”.只有根据内容的特点和学生学习需要，合理创设并呈现多样化的问题情境，将问题情境融入教学的各个环节，有效引发并维持学生高阶思维，让学生的思考贯穿整个课堂，只有把学生的思维活动起来，才能实现学生的高阶思维的形成，才能真正达成深度学习，发展学生核心素养.

参考文献：

[1]戴建仁，李志洪.教学目标“三步三化”诠释策略初探---以高中数学必修课程内容为例[J].福建中学数学，2019（10）：23-25

本文系福建省中小学名师名校长培养工程专项课题《指向深度学习的高中数学教学研究》（课题编号：DTRSX2019008）的阶段性研究成果.