

落实“五育并举” 突出理性思维

——对2020年高考部分数学卷的研究

莆田第二中学 蔡海涛

福建师范大学数学与信息学院 陈清华

2019年11月,教育部考试中心发布“中国高考评价体系”,明确指出:“高考评价体系由‘一核’‘四层’‘四翼’组成,其中:‘一核’为考查目的,即立德树人、服务选才、引导教学;‘四层’为考查内容,即核心价值、学科素养、关键能力、必备知识;‘四翼’为考查要求,即基础性、综合性、应用性、创新性。”

2020年高考具有特殊的时代背景:既是决胜全面建成小康社会、决战脱贫攻坚的大背景下的一次高考,又是在疫情防控常态化下的一次高考,更是新旧高考平稳过渡的一次高考(福建省2021年实施新高考)。2020年高考数学全国卷I(以下简称“全国卷I”)依托《中国高考评价体系》,真正落实“在多角度、多层次考查数学知识的基础上,注重对数学思想方法、数学能力及数学核心素养的考查,展示了数学的核心价值和人文价值,同时兼顾了试题的基础性、综合性和应用性,以及试题间的层次性,合理调控综合程度”。试题秉承“稳字当头,稳中求进”,总体相对稳定。试题设置合理情境,贯彻“五育并举”的方针,促进学生德智体美劳全面发展,践行立德树人的根本任务。试卷的命题理念从原来的“知识立意、能力立意”向“价值引领、素养导向、能力为重、知识为基”转变,充分发挥了数学作为基础学科的作用,同时也考查了考生进入高校继续学习的潜能,充分发挥了考试的引导作用,切实体现了高考的育人功能,体现了高考“立德树人、服务选才、引导教学”的核心功能,是一套很好的选拔性试卷,对中学数学教学将起到积极的引导作用。

本文以全国卷I文、理科两份试卷为主,兼顾2020年高考数学卷山东卷、海南卷,从四个维度对高考数学卷进行研究、剖析,期抛砖引玉。

一、明确方向,落实“五育并举”

1. 结合时代特征,渗透德育要求。

山东卷第6题以中国抗击新冠肺炎疫情中的真实素材设计问题情境,具有鲜明时代特征,体现了数学与社会的密切联系,对考生具有积极的教育意

义。试题引导高中生坚定理想信念、厚植家国情怀、培养奋斗精神,体现了对高中生德育的渗透。

2. 发挥学科特色,重点考查智育。

全国卷I文、理两份试卷总体运算量不大,注重数学思维的考查,侧重考查考生的理性思维能力、分析和解决问题的能力。如全国卷I理科卷第5、7、9、10、15、16题,文科卷第5、6、7、8、10、11、16题,命题从知识立意到能力立意,再到学科核心素养立意,意在以数学知识为载体考查考生的理性思维广度、深度,以及对数学思想、通性通法的掌握程度。

3. 合理创设情境,体现体育教育元素。

全国卷I理科第19题关注体育运动与学生的体育锻炼,传达着“野蛮其体魄,文明其精神”的体育意识。身心健康是素质教育的重要内容,高考数学卷设计以体育运动为问题情境的试题,体现了高考积极的育人导向作用。

4. 融合其他学科知识,展现数学之美。

全国卷I文、理科第3题是继2019年高考“断臂维纳斯”之后,又一道很好体现美育元素的试题。试题以世界建筑奇迹埃及胡夫金字塔为背景,设计了正四棱锥的计算问题,将立体几何的基本知识与世界文化遗产元素有机结合。本试题有助于引导高中生关注美育,培养审美意识。

5. 理论联系实际,引导劳动教育。

全国卷I文科第17题以工业生产中的总厂分配加工业务问题为背景,命题者将社会生产劳动实践情境与数学基本概念有机结合,发挥了高考数学卷在培养劳动观念中的引导作用。还有,高考数学卷山东卷第15题,在考查几何知识的同时,也渗透了劳动教育元素。

二、素养导向,重视“关键能力”考查

《中国高考评价体系》指出:“关键能力是指进入高等学校的学习者,在面对与学科相关的生活实践或学习探索问题时,必须具备的高质量地认识、分析、解决问题的能力。”

1. 知识获取能力。

例1(2020年高考数学卷山东卷第4题):日晷是中国古代用来测定时间的仪器,利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间。把地球看成一个球(球心记为 O),地球上一点 A 的纬度是指 OA 与地球赤道所在平面所成角,点 A 处的水平面是指过点 A 且与 OA 垂直的平面。在点 A 处放置一个日晷,若晷面与赤道所在平面平行,点 A 处的纬度为北纬 40° ,则晷针与点 A 处的水平面所成角为()



- A. 20° B. 40° C. 50° D. 90°

简析: 本题主要考查中国古代数学文化,要求考生融会贯通地把握新信息的实质,从中抽象出数学的模型。试题考查球体相关计算、平面平行、线面垂直性质等知识,考查空间想象和应用意识,考查函数与方程及化归与转化思想,考查数学抽象、数学建模、直观想象等核心素养。解答本题,考生首先要画出过球心和晷针所确定的平面截地球和晷面的截面图,根据面面平行的性质定理和线面垂直的定义判定有关截线的位置关系,而后根据点 A 处的纬度,计算出晷针与点 A 处的水平面所成角。

2. 实践操作能力。

例2(2020年高考数学卷山东卷第17题):在① $ac = \sqrt{3}$, ② $c \sin A = 3$, ③ $c = \sqrt{3}b$ 这三个条件中任选择一个,补充在下面问题中,若问题中的三角形存在,求 c 的值;若问题中的三角形不存在,说明理由。

问题:是否存在 $\triangle ABC$, 它的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\sin A = \sqrt{3} \sin B, C = \frac{\pi}{6}$, _____?

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分。

简析: 高考综合改革的重要特征就是高考命题从能力立意到素养导向的转变,结构不良试题很好实现了这个载体功能(任子朝,赵轩)。在应对结构不良新的问题情境时,考生需合理地组织、调动各种相关知识与能力,实施探究或实验活动,分析结果,寻求有效的解决方法。本题考查正弦定理、余弦定理等解三角形基础知识,考查运算求解能力,考查函数与方程思想、考查逻辑推理、数学运算等核心素养。

3. 思维认知能力。

例3(2020年高考数学卷全国卷I文科第12题、理科第10题):已知 A, B, C 为球 O 的球面上的三个点, $\odot O_1$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆。若 $\odot O_1$ 的面积为 4π , $AB = BC = AC = OO_1$,则球 O 的表面积为()

- A. 64π B. 48π C. 36π D. 32π

简析: 解答本题,考生可由已知得等边 $\triangle ABC$ 的外接圆半径,进而求出等边 $\triangle ABC$ 的边长,得出 OO_1 的值,后根据球截面性质,求出球的半径,即可得出结论。解题关键是:能够根据对问题情境的分析,建构数学模型,运用抽象与联想、归纳与概括、推演与计算、模型与建模等思维方法来组织、调动相关的知识与能力。试题考查球的内接、表面积等基础知识,考查空间想象能力、推理论证能力、运算求解能力,考查函数与方程的思想,考查直观想象、数学运算等核心素养。

三、重点突出,考查“数学本质”

1. 固本强基, 夯实发展基础。

全国卷I试题以纲为纲,以本为本。“以纲为纲”,第一个“纲”是考纲(包括2019版“考试大纲”、《中国高考评价体系》,2021年我省将取消“考试大纲”);第二个“纲”是《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》;第三个“纲”是《基于高考评价体系的数学科考试内容改革实施路径》(《中国考试》2019年第12期)一文中的“考查要求”。“以本为本”,第一个“本”是指近3年高考试题和教材;第二个“本”是指以学生为本,命题贴近考生实际。

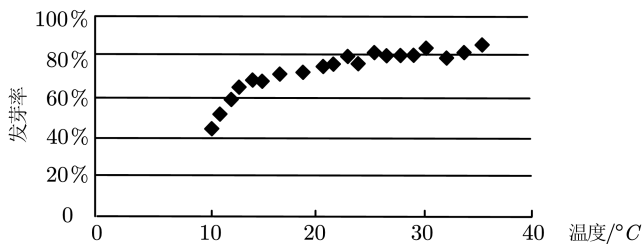
全国卷I文、理科两份试卷,在题型、题量、分值及知识分布上,较往年保持稳定。理科卷选择题以考生熟悉的复数问题开篇,文科卷选择题以简单的集合问题开篇,两道题考生均较易上手。选择题、填空题难度不大,第11、12题虽有一定难度,但也不及以往高考数学卷选填部分压轴题的难度。解答题考查的均是高中数学的主干内容,文、理科两份试卷共有7道题完全相同,其中选择题4道、填空题1道、解答题2道。通览文、理科两份试卷,很多题目似曾相识,甚至在考生平常的练习或模拟考试中见到过,题目梯度设置合理,无偏题怪题,综合程度高的考题少,无论是整卷还是具体大题,

基本遵循由易到难的命题原则（包括理科卷第 20、21 题，起点也都很低，绝大多数考生在读懂题意后，解决第 1 小问不存在障碍）。大多数试题考查单一知识点，如理科 19 题重点考查分类与整合的数学思想，3 个问题均聚焦“求概率”，未涉及分布列、期望方差等知识。

2. 关注应用，引导阅读理解。

阅读是人获取知识信息、提高认知的基本途径，关系着一个人德、才、学、识的完善和提升。就考查阅读理解、信息整理能力而言，今年的高考数学卷试题重视“读什么、如何读”的引导。

例 4（2020 年高考数学卷全国卷 I 文、理科第 5 题）：某校一个课外学习小组为研究某作物种子的发芽率 y 和温度 x （单位： $^{\circ}\text{C}$ ）的关系，在 20 个不同的温度条件下进行种子发芽实验，由实验数据 $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, 20)$ 得到下面的散点图：



由此散点图 10°C ，在至 40°C 之间，下面四个回归方程类型中最适宜作为发芽率 y 和温度 x 的回归方程类型的是（ ）

- A. $y = a + bx$ B. $y = a + bx^2$
C. $y = a + be^x$ D. $y = a + b \ln x$

简析：为紧跟社会信息化发展的趋势，高考数学卷加大了对考生实用信息处理能力的考查力度。甄别信息、整理信息、评估信息、利用信息，已成为未来人才重要的数学能力。本题考查回归方程知识，考查数据处理能力与应用意识，考查函数与方程及数形结合思想，考查考生的知识迁移水平和应用能力，考查了数学建模与直观想象核心素养。考生只要认真观察散点图的分布，就不难做好函数模型的选择，也不难得到答案。

3. 强调创新，凸显理性思维价值。

近年，高考数学卷不断凸显理性思维价值，加强了对考生批判性思维、阅读理解、信息整理、语言表达等能力的考查。

例 5（2020 年高考数学卷全国卷 I 理科第 12 题）：若 $2^a + \log_2 a = 4^b + 2 \log_4 b$ ，则（ ）

- A. $a > 2b$ B. $a < 2b$ C. $a > b^2$ D. $a < b^2$

简析：本题考查的是“构造函数，利用函数单调性比较自变量大小”，考生需要利用对数的运算法则对公式进行适当的放缩（体现了方程函数不等式的相互转化），若没有对函数知识的深入理解，将难以解答。试题考查指数函数以及对数函数性质等基础知识，考查推理论证能力及创新意识，考查函数与方程及数形结合思想，考查数学建模及数学运算等核心素养。

例 6（2020 年高考数学卷全国卷 I 理科第 11 题）：已知 $\odot M: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ ，且直线 $l: 2x + y + 2 = 0$ ， P 为 l 上的动点，过点 P 作 $\odot M$ 的切线 PA, PB ，切点为 A, B ，当 $|PM| \cdot |AB|$ 最小时，直线 AB 的方程为（ ）

- A. $2x - y - 1 = 0$ B. $2x + y - 1 = 0$
C. $2x - y + 1 = 0$ D. $2x + y + 1 = 0$

简析：解答本题，考生由题意可判断直线 l 与圆 $\odot M$ 相离，由圆的知识可知，四点 A, P, B, M 共圆，且 $AB \perp MP$ ，根据 $|PM| \cdot |AB| = 4S_{\triangle PAM} = 4|PA|$ 可知，当直线 $MP \perp l$ 时， $|PM| \cdot |AB|$ 最小，求出以 MP 为直径的圆的方程，根据圆系的知识即可求出直线 AB 的方程。本题的关键步是：把 $|PM| \cdot |AB|$ 的转化为 $4S_{\triangle PAM}$ ，把数的式子转化为形的式子。试题考查直线与圆位置关系基础知识，考查推理论证能力，考查函数与方程、数形结合及化归与转化等思想，考查直观想象核心素养。

四、纵向比较，关注压轴题变化

通过近三年高考全国卷 I 文、理试卷实测数据分析及对部分考生访谈，可以发现高考试题中客观题的第 11、12、16 题以及解答题中第 19、20、21 题考生得分率较低，这些试题是高考试卷中的“压轴题”，值得一线教师认真研究。我们将近三年全国卷 I 文、理试卷的“压轴题”进行纵向比较，可以发现如下特点。

1. 关注题序变化，去模式求创新。

全国卷 I 第 19、20、21 三道解答题理科卷在 18、19、20 三年分别考查解几、概率统计、函数导数；解几、函数导数、概率统计；概率统计、解几、函数导数。文科卷在 18、19、20 三年分别考查概率统计、解几、函数导数；立几、函数导数、解几；立几、函数导数、解几。高考题序的变化打破以往“压轴”题一成不变的格局，落实了从“能力立意”到

“素养导向”的转变，考查了考生的数学素养。这也给那些高三复习搞“忽视教材、追踪热点、题海战术”备考策略的教师敲响了警钟，启示我们在高考备考时要稳扎稳打，关注过程性教学，在思想的高度上去引领方法，去领会、感悟分析问题和解决问题的能力。

2. 关注知识载体，以不变应万变。

全国卷 I 文、理试卷客观题“压轴”主要考查六大主干知识（三角、数列、立几、解几、概率统计、函数导数），解答题理科卷主要考查“函数导数”、“概率统计”，文科卷主要考查“函数导数”、“解析几何”等知识。由此不难发现所谓的“压轴题”以什么知识为载体不是一成不变的，特别是 2021 年福建省实施新高考后，取消了选考题，以六大主干知识为载体的试题将各自占据解答题的一席之地。我们认为每一个知识板块都有可能成为“压轴题”的载体，所以在复习备考时，我们反对“猜题押宝”，只有夯实基础，理清知识体系，提升学生能力，才能应对强调创新的新高考，才能做到以不变应万变，笑傲高考。

3. 关注知识交汇，重视合理转化。

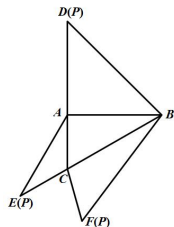
例 7（2020 年高考数学卷全国卷 I 理科第 16 题）：如图，在三棱锥 $P-ABC$ 的平面展开图中，

$$AC = 1, AB = AD = \sqrt{3},$$

$$AB \perp AC, AB \perp AD,$$

$$\angle CAE = 30^\circ,$$

$$\text{则 } \cos \angle FCB = \underline{\hspace{2cm}}.$$



简析：本小题以平面图形的翻折问题为载体，考查空间几何体的展开、解三角形等知识；考查空间想象能力，推理论证能力；考查化归与转化思想；考查直观想象、逻辑推理等核心素养；体现基础性、综合性。

本道压轴题在立体几何与三角函数的交汇点处设计问题，让人眼前一亮。本题只要能够根据几何体的特征，发现 D, E, F 重合于一点，得到 $AE = AD, CE = CF$ ，从而把问题转化为解三角形的问题。知识网络交汇处的问题对考生数学基础知识的考查达到一定的深度，是创新性的深层次要求，需引起一线教师的关注。另外，我们还须关注数学与其他学科的交汇，如“音、体、美与数学”、“物理与数学”、“化学与数学”、“地理与数学”、“医学与数学”等，此类试题以“新交汇”为载体，

意在考查数学建模、数学抽象、直观想象等核心素养，感悟数学知识与其他学科之间的联系，加强对数学“有用性”的理解。

4. 加强错因分析，引领精准备考。

教师在高考备考中，只有先研究学情，才能做到精准备考，对于学生错误较多的问题进行错因分析，分析学生解题的难点、失分的原因，究竟是知识层面还是能力层面或是思想层面或是心理层面，做好了错因分析再拟定备考策略。

如分析学生解决概率统计问题的难点，首先是阅读理解方面，如 2020 年全国卷 I 理第 19 题，学生无法正确分析比赛发生的情况，考虑不周导致出错；其次是运算求解方面，如 2019 年全国卷 I 理第 21 题，第（1）问的 α, β 的概率运算及第（2）问的数列的运算，都给学生不小的挑战。教师在复习时要引导学生对真实复杂的情境，做好读：文字信息，图表信息，初步了解考查的知识点；审：结合考查目标，理解图文的内在含义；析：整合有效信息，厘清数据关系，提升学生阅读理解的能力。还有，教师要引导学生学会正确把握各统计量的含义，能够利用统计量说明问题，提升学生分析数据和运算求解的能力。

通过以上对 2020 年高考部分数学卷的研究，我们不难发现高考综合改革背景下数学卷的特点：文理同卷，增加了多项选择题，设置了结构不良试题、取消选做题……这启发数学教师深入研究新课标、新课程，更加关注数学学科的综合性和应用性，在复习策略上由“全面覆盖”转向“精简内容”，由“简单重复”转向“温故知新”，由“拘泥教材”转向“整合教材”，由“统一标准”转向“分层要求”，由“关注教”转向“关注学”。

参考文献：

- [1] 教育部考试中心. 中国高考评价体系[M]. 北京：人民教育出版社，2019.
- [2] 祝敏君 陈清华. 规避模式 缩小差距 明确导向 弘扬文化——对 2019 年高考数学卷全国卷 I 的研究[J]. 福建教育，2019(27):40-42.
- [3] 任子朝 赵轩. 创设真实情境 突出学科特点落实“五育”要求——数学高考加强体美劳考查[J]. 数学通报，2019(7):23-27.
- [4] 教育部考试中心. 以真实情景落实“五育并举” 以理性思维践行“立德树人”[J]. 中国考试，2019(7):7-10.

[5]柯跃海. 高考数学试题情境的创设实践[J]. 中国考试, 2020(6):1-9.

[6]任子朝 赵轩. 数学考试中的结构不良问题研究[J]. 数学通报, 2020(2):1-3.

初审意见:二位作者均为省级名师, 其中陈清华教授系我刊数学科核心作者, 蔡海涛系省“十三五”中学数学学科带头人培养对象, 手握三项省级课题。具体到本文, 以案例加简析的结构, 由今年高考部分数学卷的研究, 引申出高考综合改革背景下数学卷的特点归纳, 对一线教师有较高参考价值。5436字, 4码, 复习栏目。原创, 除试题引用部分, 重复率不到10%。

外审意见:作者对今年高考的亮点题均作了剖析, 点评到位。但对今年全国卷 I 压轴题的分析不够。建议如下: (1) 将文章的第一大点(一、明确方向, 落实“五育并举”)篇幅压缩; (2) 增加一大点, 对比分析今年与近两年高考题中的压轴题。今年压轴的题 16, 以及概率统计题(应用题)、导数题, 与去年比较, 风格与难易方面都有了调整, 请对这些变化进行剖析, 并对明年的高考复习提出思考或建议。