一道省质检试题的八种解法

蔡海涛

摘要:2020 年福建省高三毕业班质量检查测试理科数学第 21 题是一道以不等式恒成立问题为载体，考查利用导数研究函数的极值、最值的问题．本文将给出这道题的八种解法，通过一题多解探究解决此类问题的方法．

关键词：导数；分离参数法；恒成立

题目：（2020 年福建省省质检・理 21）已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x}{a}-\ln\left(ax\right)$．

（1）求 $f\left(x\right)$ 的极值；

（2）若 $e^{x}\ln x+mx^{2}+\left(1-e^{x}\right)x+m\leqslant 0$，求正实数 m 的取值范围．

解：（1）当 $a>0$ 时，$f\left(x\right)$ 的极小值为 $f\left(a\right)=1-2\ln a$，无极大值；当 $a<0$ 时，$f\left(x\right)$ 的极小值为 $f\left(a\right)=1-2\ln\left(-a\right)$，无极大值．（过程略）

（2）**解法 1**：由（1）知，当 a=1 时，$f\left(x\right)=x-\ln x$ 在 $\left(0,1\right)$ 单调递减，在 $\left(1,+\infty\right)$ 单调递增，

所以 $f\left(x\right)_{\min}=f\left(1\right)=1$，所以 $x-\ln x\geqslant 1$，因为 $e^{x}\ln x+mx^{2}+\left(1-e^{x}\right)x+m\leqslant 0$，

所以 $e^{x}\left(\ln x-x\right)+mx^{2}+x+m\leqslant 0$，所以 $\dfrac{mx^{2}+x+m}{e^{x}}\leqslant x-\ln x$，（*），

令 $h\left(x\right)=\dfrac{mx^{2}+x+m}{e^{x}}$，$x\in\left(0,+\infty\right)$，

则 $h'\left(x\right)=\dfrac{\left(2mx+1\right)e^{x}-\left(mx^{2}+x+m\right)e^{x}}{e^{2x}}=\dfrac{-mx^{2}+\left(2m-1\right)x-m+1}{e^{x}}=\dfrac{\left(-mx+m-1\right)\left(x-1\right)}{e^{x}}$，

因为 $m>0$，所以 $1-\dfrac{1}{m}<1$，

①若 $0<m\leqslant 1$，则 $1-\dfrac{1}{m}\leqslant 0$，当 $0<x<1$ 时，则 $h'\left(x\right)>0$，所以 $h\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 单调递增；当 $x>1$ 时，则 $h'\left(x\right)<0$，所以 $h\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 单调递减．

所以 $h\left(x\right)_{\max}=h\left(1\right)=\dfrac{2m+1}{e}$，又因为 $f\left(x\right)\geqslant 1$，且 $h\left(x\right)$ 和 $f\left(x\right)$ 都在 $x=1$ 处取得最值，

所以 $\dfrac{2m+1}{e}\leqslant 1$，解得 $m\leqslant\dfrac{e-1}{2}$，所以 $0<m\leqslant\dfrac{e-1}{2}$，

②若 $m>1$，则 $0<1-\dfrac{1}{m}<1$，当 $0<x<1-\dfrac{1}{m}$ 时，$h'\left(x\right)<0$，$h\left(x\right)$ 在 $\left(0,1-\dfrac{1}{m}\right)$ 单调递减；当 $1-\dfrac{1}{m}<x<1$ 时，$h'\left(x\right)>0$，$h\left(x\right)$ 在 $\left(1-\dfrac{1}{m},1\right)$ 单调递增；当 $x>1$ 时，$h'\left(x\right)<0$，$h\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 单调递减，所以 $h\left(1\right)=\dfrac{2m+1}{e}>1$，与（*）矛盾，不符合题意，舍去．

综上，正实数 m 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{e-1}{2}\right]$．

解法 2：同法 1，$\dfrac{mx^{2}+x+m}{e^{x}}\leqslant x-\ln x$，要使原不等式成立，则当 $x=1$ 时上式必须成立，

代入得 $m\leqslant\frac{\mathrm{e}-1}{2}$，此时 $0<m\leqslant\frac{\mathrm{e}-1}{2}$.

下面证明：当 $0<m\leqslant\frac{\mathrm{e}-1}{2}$ 时，原不等式恒成立.

令 $h(x)=\frac{mx^2+x+m}{\mathrm{e}^x}$， $x\in(0,+\infty)$，

则 $h'(x)=\frac{(2mx+1)\mathrm{e}^x-(mx^2+x+m)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}=\frac{-mx^2+(2m-1)x-m+1}{\mathrm{e}^x}=\frac{(-mx+m-1)(x-1)}{\mathrm{e}^x}$，

因为 $0<m\leqslant\frac{\mathrm{e}-1}{2}$， $x>0$，所以 $-mx+m-1<0$，

所以当 $0<x<1$ 时， $h'(x)>0$，当 $x>1$ 时， $h'(x)<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 单调递减，

$h(x)_{\max}=h(1)=\frac{2m+1}{\mathrm{e}}\leqslant1$，所以不等式 $\frac{mx^2+x+m}{\mathrm{e}^x}\leqslant x-\ln x$ 恒成立，即原不等式恒成立，

所以正实数 m 的取值范围为 $\left(0,\frac{\mathrm{e}-1}{2}\right]$.

解法 3：同法 2，有 $0<m\leqslant\frac{\mathrm{e}-1}{2}$. 下面证明：当 $0<m\leqslant\frac{\mathrm{e}-1}{2}$ 时，原不等式恒成立.

由已知得 $\frac{mx^2+x+m}{\mathrm{e}^x}+\ln x-x\leqslant0$，

令 $g(x)=\frac{mx^2+x+m}{\mathrm{e}^x}+\ln x-x$

则 $g'(x)=\frac{(1-x)\left[mx^2+(1-m)x+\mathrm{e}^x\right]}{\mathrm{e}^x}$.

因为 $x>0$， $0<m\leqslant\frac{\mathrm{e}-1}{2}$，所以 $mx^2+(1-m)x+\mathrm{e}^x>0$.

所以当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$；

因此 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(1)\leqslant0$，所以正实数 m 的取值范围为 $\left(0,\frac{\mathrm{e}-1}{2}\right]$.

解法 4：同法 2 有 $0<m\leqslant\frac{\mathrm{e}-1}{2}$. 下面证明：当 $0<m\leqslant\frac{\mathrm{e}-1}{2}$ 时，原不等式恒成立.

因为 $0<m\leqslant\frac{\mathrm{e}-1}{2}$，所以 $\frac{mx^2+x+m}{\mathrm{e}^x}\leqslant\frac{(\mathrm{e}-1)x^2+2x+(\mathrm{e}-1)}{2\mathrm{e}^x}$，

令 $h(x)=\frac{(\mathrm{e}-1)x^2+2x+(\mathrm{e}-1)}{2\mathrm{e}^x}$， $x\in(0,+\infty)$，

则 $h'(x)=\frac{-(\mathrm{e}-1)x^2+2(\mathrm{e}-2)x-\mathrm{e}+3}{2\mathrm{e}^x}=\frac{-(x-1)\left[(\mathrm{e}-1)x-(\mathrm{e}-3)\right]}{2\mathrm{e}^x}$，

所以当 $0<x<1$ 时， $h'(x)>0$，当 $x>1$ 时， $h'(x)<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 单调递减，

所以 $h(x)_{\max}=h(1)=1$，所以 $h(x)\leqslant 1$，

即 $\dfrac{mx^2+x+m}{\mathrm{e}^x}\leqslant 1$，所以当 $0<m\leqslant\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$ 时，$\dfrac{mx^2+x+m}{\mathrm{e}^x}\leqslant x-\ln x$ 成立，即原不等式恒成立.

所以当正实数 m 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}\right]$.

解法 5：因为 $\mathrm{e}^x\ln x+mx^2+(1-\mathrm{e}^x)x+m\leqslant 0$，又因为 $-x^2-1<0$，

所以 $m\leqslant\dfrac{\mathrm{e}^x\ln x+(1-\mathrm{e}^x)x}{-x^2-1}$，

由（1）知，$\ln x\leqslant x-1$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立.

所以 $\dfrac{\mathrm{e}^x\ln x+(1-\mathrm{e}^x)x}{-x^2-1}\geqslant\dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)+(1-\mathrm{e}^x)x}{-x^2-1}=\dfrac{\mathrm{e}^x-x}{x^2+1}$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立.

令 $H(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-x}{x^2+1}$，$x\in(0,+\infty)$，则 $H'(x)=\dfrac{(x-1)\left[\mathrm{e}^x(x-1)+x+1\right]}{\left(x^2+1\right)^2}$，

令 $K(x)=\mathrm{e}^x(x-1)+x+1$，

则 $K'(x)=x\mathrm{e}^x+1>0$，所以 $K(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，所以 $K(x)>K(0)=0$，

所以当 $0<x<1$ 时，$H'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$H'(x)>0$，

所以 $H(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，所以 $H(x)_{\min}=H(1)=\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$，

综上当 $x=1$ 时，$y=\dfrac{\mathrm{e}^x\ln x+(1-\mathrm{e}^x)x}{-x^2-1}$ 取得最小值 $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$，

所以正实数 m 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}\right]$.

解法 6：同解法 5 有 $m\leqslant\dfrac{\mathrm{e}^x\ln x+(1-\mathrm{e}^x)x}{-x^2-1}$，

由（1）知，$\ln x\leqslant x-1$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立.

令 $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x\ln x+(1-\mathrm{e}^x)x}{x^2+1}(x>0)$，

则 $g'(x)=\dfrac{(1-x)\left\{\mathrm{e}^x\left[(1-x)\ln x+x^2+\dfrac{1}{x}\right]+1+x\right\}}{\left(x^2+1\right)^2}$

（i）由 $\ln x\leqslant x-1$ 得 $\ln x\geqslant\dfrac{x-1}{x}$，当 $0<x<1$ 时，$1-x>0$，$(1-x)\ln x>-\dfrac{(1-x)^2}{x}$，

故 $(1-x)\ln x+\dfrac{1}{x}+x^2>\dfrac{1-(1-x)^2}{x}+x^2>0$，即 $g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增；

（ii）当 $x>1$ 时，由 $\ln x\leqslant x-1$ 得 $(1-x)\ln x>(1-x)(x-1)=-1+2x-x^2$，

所以 $(1-x)\ln x+\dfrac{1}{x}+x^2>2x+\dfrac{1}{x}-1>0$，即 $g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减；

那么 $g(x)\leqslant g(1)=\dfrac{1-\mathrm{e}}{2}$，所以 $m\leqslant\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$，

综上，正实数m的取值范围为$\left(0,\dfrac{e-1}{2}\right]$.

解法7：同解法5有$m\leqslant\dfrac{e^x\ln x+\left(1-e^x\right)x}{-x^2-1}$，

令$g\left(x\right)=\dfrac{e^x\left(x-\ln x\right)-x}{x^2+1}$，

因为$x-\ln x\geqslant 1$，又易证得$e^x\geqslant 1+x+\dfrac{x^2}{2}\geqslant 1+x+\dfrac{x^2}{e}\left(x>-1\right)$，

所以$e^{x-1}\geqslant x+\dfrac{\left(x-1\right)^2}{e}\left(x>0\right)$，$e^x\geqslant ex+\left(x-1\right)^2\left(x>0\right)$，

则$g\left(x\right)=\dfrac{e^x\left(x-\ln x\right)-x}{x^2+1}\geqslant\dfrac{e^x-x}{x^2+1}\geqslant\dfrac{ex+\left(x-1\right)^2-x}{x^2+1}=\dfrac{e-1}{2}+\dfrac{\left(3-e\right)\left(x-1\right)^2}{2\left(x^2+1\right)}\geqslant\dfrac{e-1}{2}$.

当且仅当$x=1$时,上式等号成立，故$g\left(x\right)_{\min}=\dfrac{e-1}{2}$.

所以正实数m的取值范围为$\left(0,\dfrac{e-1}{2}\right]$.

解法8：要使得原不等式成立，则必须当$x=1$时上式成立，代入得$m\leqslant\dfrac{e-1}{2}$，

下面证明：当$m\leqslant\dfrac{e-1}{2}$时，原不等式恒成立.

因为$m\leqslant\dfrac{e-1}{2}$，且$x^2+1>0$，

所以$e^x\ln x+mx^2+\left(1-e^x\right)x+m\leqslant e^x\ln x+\dfrac{e-1}{2}\left(x^2+1\right)+\left(1-e^x\right)x$，

令$k\left(x\right)=e^x\ln x+\dfrac{e-1}{2}\left(x^2+1\right)+\left(1-e^x\right)x$，$x\in\left(0,+\infty\right)$，

则$k'\left(x\right)=e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}-x-1\right)+\left(e-1\right)x+1$，

令$\varphi\left(x\right)=e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}-x-1\right)+\left(e-1\right)x+1$，所以$\varphi'\left(x\right)=e^x\left(\ln x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}-x-2\right)+e-1$，

由（1）知，$x-\ln x\geqslant 1$，即$\ln x-x\leqslant -1$，当且仅当$x=1$时等号成立.

所以

$\varphi'\left(x\right)=e^x\left(\ln x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}-x-2\right)+e-1\leqslant e^x\left(-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}-3\right)+e-1=e^x\left(\dfrac{1}{e^{x-1}}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}-3\right)-1$，

再令$M\left(x\right)=\dfrac{1}{e^{x-1}}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}-3\left(x>0\right)$，下面证明$M\left(x\right)<0$，

由$x-\ln x\geqslant 1$，得$e^{x-1}\geqslant x$，因为$x>0$，所以$\dfrac{1}{e^{x-1}}\leqslant\dfrac{1}{x}$，

所以$M\left(x\right)=\dfrac{1}{e^{x-1}}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}-3<\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}-3=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}-3=\dfrac{-3x^2+3x-1}{x^2}<0$，

所以$e^xM\left(x\right)-1<0$，所以$\varphi'\left(x\right)<0$，所以$k'\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$单调递减,

又因为$k'\left(1\right)=0$，所以当$0<x<1$时，$k'\left(x\right)>0$，当$x>1$时，$k'\left(x\right)<0$，

所以$k\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$单调递增，在$\left(1,+\infty\right)$单调递减，所以$k\left(x\right)_{\max}=k\left(1\right)=0$，

所以$k(x)\leqslant 0$，所以$\mathrm{e}^x\ln x+mx^2+\left(1-\mathrm{e}^x\right)x+m\leqslant 0$，当且仅当$x=1$时等号成立，

所以正实数m的取值范围为$\left(0,\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}\right]$.

在解题教学中，教师要善于挖掘数学问题的深层本质，寻找题目条件与结论之间的逻辑关系，帮助学生准确审题、获取解题思路，通过一题多解拓展学生的思维[1].

参考文献:

［1］ 候 萱 丁新城．一题多解教学的几点思考［J］．中学数学杂志，2020(1):34-36.