题中无圆心有圆　圆来就这么简单

卢妮　　　蔡海涛

福建省莆田第二中学

研究近年高考数学试题，发现解析几何对“椭圆”和“抛物线”的考查难度有所下降，“直线与圆”的地位大幅度提升，具有数学文化背景的题目层出不穷. 其中，有一类圆的问题在已知条件中没有直接给出圆的有关信息，而是隐藏在条件中，需要通过分析转化，从而发现圆（或圆的方程），进而利用圆的知识求解，这类问题称为“隐形圆”问题. 比如“蒙日圆”“阿波罗尼斯圆”等. “隐形圆”问题综合性强，充分考查了学生数形结合、化归与转化等数学思想方法，学生答题有一定的难度. 本文以几道高考题和模拟题为例，探寻“隐形圆”问题求解策略.

一、利用圆的定义（到定点的距离等于定长的点的轨迹）确定隐形圆

例1 若与点 $A\left(2,2\right)$ 的距离为1且与点 $B\left(m,0\right)$ 的距离为3的直线恰好有两条, 则实数 m 的取值范围为___________.

解析　与定点 A 距离为1的点的轨迹为圆，所以与点 $A\left(2,2\right)$ 的距离为1的直线为圆的切线，同理与点 $B\left(m,0\right)$ 的距离为3的直线也以 B 为圆心，3为半径的圆的切线，故同时满足两个条件的直线应该为两圆的公切线, 因为公切线恰为两条, 所以两圆相交, 则 $3-1<\left|AB\right|<3+1$, 所以 m 的取值范围为 $\left(2-2\sqrt{3},2\right)\cup\left(2,2+2\sqrt{3}\right)$.

点评　本题根据圆的定义得到隐圆，得到以点 $A\left(2,2\right)$ 和点 $B\left(m,0\right)$ 为圆心的两个圆，这是本题的关键，进而由已知条件得两圆位置关系，从而求得 m 的取值范围.

变式训练1： 若对任意 $a\in \mathrm{R}$，直线 $l: x\cos\alpha+y\sin\alpha=2\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{6})+4$ 与圆 $C:\left(x-m\right)^2+\left(y-\sqrt{3}m\right)^2=1$ 均无公共点, 则实数 m 的取值范围为___________.

解析 直线 l 的方程可化为：$(x-1)\cos\alpha+(y-\sqrt{3})\sin\alpha=4$，$M\left(1,\sqrt{3}\right)$ 到 l 的距离为4, 所以 l 是以 M 为圆心, 半径为 4 的定圆的切线系，故问题转化为圆 M 与圆 C 内含，易得 m 的取值范围为 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2}\right)$.

二、到两定点距离的平方和为定值确定隐形圆

例 2 在平面直角坐标系 xoy 中，已知圆 $C:\left(x-a\right)^2+\left(y-a+2\right)^2=1$，点 $A\left(0,2\right)$，若圆 C 上存在点 M，满足 $MA^2+MO^2=10$，则实数 a 的取值范围是______.

解析　由 $MA^2+MO^2=10$，可得点 M 满足方程为 $x^2+\left(y-1\right)^2=4$，则问题转化为该圆与圆 C 有公共点，易得实数 a 的取值范围为 $\left[0,3\right]$.

点评 本题关键在于确定动点 M 的位置，根据点 M 到点 A 和点 O 的距离的平方和为定值，从而确定隐圆，突破了本题难点.

变式训练 2：(2017 北大自主招生) 正方形 $ABCD$ 与点 P 在同一平面内, 已知该正方形的边长为 1, 且 $|PA|^2+|PB|^2=|PC|^2$, 则 $|PD|$ 的最大值为（　　）

A. $2+\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $1+\sqrt{2}$　　D. 前三个答案都不对

解析 建立直角坐标系，设 $A(0,0)$，$B(1,0)$，$C(1,1)$，$D(0,1)$，$D(x,y)$

由 $|PA|^2+|PB|^2=|PC|^2$ 得 $x^2+(y+1)^2=2$，圆心 $M(0,-1)$，则 $|PD|$ 的最大值为 $|MD|+r=2+\sqrt{2}$. 故选 A.

三、动点 P 对两定点 A、B 张角是 90°（$k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$ 或 $\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}=0$）确定隐形圆

例 3（2014 年高考四川卷 • 文 9） 设 $m\in R$, 过定点 A 的动直线 $x+my=0$ 和过定点 B 的动直线 $mx-y-m+3=0$ 交于点 P，则 $PA+PB$ 的取值范围是（　　）

$A.\left[\sqrt{5},2\sqrt{5}\right]$　　B. $\left[\sqrt{10},2\sqrt{5}\right]$　　C. $\left[\sqrt{10},4\sqrt{5}\right]$　　D. $\left[2\sqrt{5},4\sqrt{5}\right]$

解析 易得 $A(0,0)$, $B(1,3)$, 分类讨论直线斜率存在与否, 当直线 $x+my=0$ 斜率不存在时，可得 $P(0,3)$. 当直线斜率存在时，发现 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$，从而知点 P 在以 AB 为直径的圆上，当 P 与 A 或 B 点重合时，$PA+PB$ 取到最小值, 当 P 不与 A 或 B 点重合时, 由不等式的性质知 $PA+PB\leqslant 2\sqrt{\dfrac{PA^2+PB^2}{2}}=2\sqrt{5}$, 故选 B.

点评 本题解题的突破口是发现两条动直线的关系，由 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$ 确定隐圆，得到 P 点轨迹，结合不等式性质求解.

变式训练3 已知圆 $C:(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 和两点 $A(-m,0)$，$B(m,0)$，若圆上存在点 P，使得 $\angle APB=90^\circ$，m 的取值范围为__________.

解析 由已知得以 AB 为直径的圆与圆 C 有公共点，易求得 m 的取值范围为 $[4,6]$.

四、两定点 A、B, 动点 P 满足 $\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}=\lambda$ 确定隐形圆

例 4（2017 年高考江苏卷 • 13） 在平面直角坐标系 xoy 中，$A(-12,0)$, $B(0,6)$，点 P 在圆 $O:x^2+y^2=50$ 上，若 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\leqslant 20$，则点 P 的横坐标的取值范围是_________.

解析 设$P(x,y)$，由$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\leqslant 20$，易得$2x-y+5\leqslant 0$，由$\begin{cases}2x-y+5=0\\x^2+y^2=50\end{cases}$，可得

$A:\begin{cases}x=-5\\y=-5\end{cases}$或$B:\begin{cases}x=1\\y=7\end{cases}$，由$2x-y+5\leqslant 0$得点$P$在圆左边弧$\overset{\frown}{AB}$上，结合限制条件

$-5\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 5\sqrt{2}$，可得点$P$横坐标的取值范围为$[-5\sqrt{2},1]$.

点评 在平面内，若A，B为定点，且$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\lambda$，则$P$的轨迹是以$M$为圆心，$\sqrt{\lambda+\frac{1}{4}AB^2}$为半径的圆. 本题$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\leqslant 20$确定隐圆，得到$P$点轨迹为圆左边弧$\overset{\frown}{AB}$上，进而问题轻松获解.

变式训练4 已知点$A(2,3)$，$B(6,-3)$，点P在直线$3x-4y+3=0$上，若满足等式$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}+2\lambda=0$的点$P$有两个，则实数$\lambda$的取值范围是______.

解析 设$P(x,y)$，由$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}+2\lambda=0$得$(x-4)^2+y^2=13-2\lambda\left(\lambda<\frac{13}{2}\right)$，问题转化为直线与圆相交问题，所以$\lambda<2$.

五、两定点A、B，动点P满足$\frac{PA}{PB}=\lambda(\lambda>0，\lambda\neq 1)$确定隐形圆（阿波罗尼斯圆）

例5（2008年高考江苏卷·13）满足条件$AB=2$，$AC=\sqrt{2}BC$的三角形ABC面积的最大值为_________.

解析 设角A，B，C对边分别为a，b，c，以$\overrightarrow{AB}$的方向为x轴正方向，以AB的中点为坐标原点建立平面直角坐标系，设$A(-1,0)$，$B(1,0)$，由$AC=\sqrt{2}BC$得$(x-3)^2+y^2=8$，所以点C的轨迹是以$(3,0)$为圆心，$2\sqrt{2}$为半径的圆，所以当点C到x轴的距离最大时三角形的面积的最大，最大值为$2\sqrt{2}$.

点评 在平面上给定两点A，B，设点P在同一平面上且满足$\frac{PA}{PB}=\lambda(\lambda>0，\lambda\neq 1)$，点$P$的轨迹是一个以定比$\lambda$内分和外分定线段$AB$的两个分点的连线为直径的圆，这个圆称为阿波罗尼斯圆，简称阿氏圆. 若学生掌握了阿波罗尼斯圆，本题不难获解.

变式训练5 在平面直角坐标xoy中，已知点$A(1,0)$，$B(4,0)$，若直线$x-y+m=0$上存在点P使得$|PA|=\frac{1}{2}|PB|$，实数m的取值范围为____________.

解析 点P阿波罗尼斯圆，m的取值范围为$\left[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right]$.

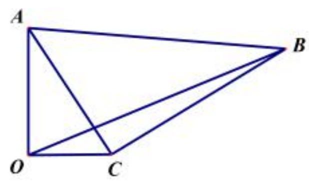
六、由圆周角的性质确定隐形圆

例 6 在$\triangle ABC$中，$\angle C=45^{\circ}$，O是$\triangle ABC$的外心，若$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}\left(m,n\in R\right)$，则$m+n$的取值范围是______________.

解析 $\angle AOB=2\angle C=90^{\circ}$，两边平方$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}\left(m,n\in R\right)$得$m^2+n^2=1$结合基本不等式，可得出$m+n$的取值范围是$\left[-\sqrt{2},1\right]$.

点评 $\angle AOB=2\angle C=90^{\circ}$知点$C$在以$O$为圆心，半径$OA$，在优弧$AB$上.

变式训练 6 如图，四边形$AOCB$，$OA\perp OC$，$CA\perp CB$，若$AC=2$，$CB=1$，则OB的取值范围是______________.



解析 点O在以AC为直径的圆上，OB的取值范围是$\left[\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1\right]$.

由以上例题分析可知，“隐圆”问题着重考查化归与转化的思想在解题中的运用，解决方法就是分析已知条件，从条件出发探求动点轨迹，把隐形轨迹显性化，从而发现圆，然后利用圆的知识求解问题.